Devoir maison 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$$

1. On pose $u_0 = -0,01$.
   a. Déterminer à la calculatrice les dix premiers termes de la suites. Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?
   b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
	A est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de A
	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur $-0,01$
Traitement :	Tant que $u > A$:
	| Affecter à u la valeur $-u^2 + 2u$
	| Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   On entre $A = -1000$
   i. Que permet de calculer cet algorithme ?
   ii. Donner le résultat alors affiché par cet algorithme.
2. On pose $u_0 = 0,01$.
   a. Déterminer à la calculatrice les dix premiers termes de la suites. Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?
   b. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto -x^2 + 2x$ sur $[0; 1]$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

   d. En déduire que pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).
   e. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Donner sans justification le comportement asymptotique de la suite (u_n) selon la valeur prise par u_0.