

Exercice 1:

Pondichéry 17 avril 2015

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
 - b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) . Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
 - c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 2:

Centres étrangers 10 juin 2015

Soit a un nombre réel fixé non nul. Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
 - b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
 - c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
 - b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .
 3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$. La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$. L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

- a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- b. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.