

Approximation de racine $\sqrt{ab}$

Soient a et b deux entiers donnés tels que $0 < a < b$. L'objectif de cette activité est d'approximer $\sqrt{ab}$.

1. Montrer que

$$a < \sqrt{ab} < b$$

2. Montrer que

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

L'encadrement $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ est donc meilleur que l'encadrement que $a < \sqrt{ab} < b$ d'où l'idée de réitérer le procédé en remplaçant a par $\frac{2ab}{a+b}$ et b par $\frac{a+b}{2}$. Ceci conduit à introduire les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointement par :

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n, a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

De plus, par construction, on a :

$$a \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b$$

3. A l'aide de cette méthode approximer $\sqrt{14}$ en complétant le tableau ci-dessous (on arrondira les résultats à 10^{-6}) :

Étape	0	1	2	3	4	5	6
a							
b							
$b - a$							

Nous allons donc chercher à prouver que les suites (a_n) et (b_n) convergent bien vers une même limite qui est $\sqrt{ab}$.

4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent.

5. Montrer que pour tout entier n ,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

6. En déduire que pour tout entier n ,

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Conclure.

7. Montrer que pour tout entier n ,

$$0 \leq \sqrt{ab} - a_n \leq b_n - a_n$$

Conclure.

8. Compléter et entrer le programme ci-dessous dans le logiciel Algobox :

```

1: VARIABLES
2: a EST_DU_TYPE NOMBRE
3: b EST_DU_TYPE NOMBRE
4: c EST_DU_TYPE NOMBRE
5: i EST_DU_TYPE NOMBRE
6: n EST_DU_TYPE NOMBRE
7: DEBUT_ALGORITHME
8:   LIRE a
9:   LIRE b
10:  LIRE n
11:  POUR i ALLANT_DE 1 A n
12:    DEBUT_POUR
13:      c PREND_LA_VALEUR a
14:      a PREND_LA_VALEUR .....
15:      b PREND_LA_VALEUR .....
16:      AFFICHER "Etape"
17:      AFFICHER* i
18:      AFFICHER* a
19:      AFFICHER* b
20:    FIN_POUR
21: FIN_ALGORITHME
```

9. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-6} près des racines des nombres suivants à l'aide de votre programme :

14 ; 21 ; 32 ; 3 ; 102 ; 144

10. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-6} près des racines de ces même nombres à l'aide d'une feuille de tableur :

11. Montrer que la suite (a_nb_n) est constante.

12. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.