Calculs d'aire

Soit f une fonction continue, croissante et positive sur $[a;b]$ et soit n un entier tel que $n \geq 2$. On appelle s_n la somme des aires des rectangles inférieurs définie par

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

et S_n la somme des aires des rectangles supérieurs définie par

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

1. A quoi correspond $\dfrac{b-a}{n}$?
2. Exprimer s_3 et S_3 pour la fonction x^2 entre $a = 1$ et $b = 4$.
3. En déduire un encadrement de l'aire sous la courbe de la fonction x^2 entre $a = 1$ et $b = 4$.
4. Écrire un algorithme permettant de déterminer s_n et S_n pour tout entier n.
5. Entrer cet algorithme dans le logiciel AlgoBox et tester avec $f(x) = x^2$ sur $[0;1]$.
6. Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de :

   a. $\displaystyle\int_0^5 e^x \mathtt{d}x$ b. $\displaystyle\int_{-1}^{20} 1 + x^2 \mathtt{d}x$ c. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{2x+3}\,\mathtt{d}x$ d. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\mathtt{d}x$

7. Vérifier vos réponses à l'aide du logiciel GeoGebra.
8. Expliquer par un dessin la réponse obtenue à la question 6d.