Étude d'une fonction rationnelle II

Définition:

Soit Δ une droite d'équation $y = ax + b$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

alors on dit que Δ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

1. Étudier les variations et les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x + 4}{2x + 4}$$

2. Montrer que pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 - \frac{4}{x + 2}$.

3. En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Étudier les positions relatives de Δ et $\mathcal{C}$.

5. Montrer que la courbe de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x + \sin^2(x)}{x}$$

admet une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.