Chapitre 8: Marches aléatoires

Définition:
Soit une expérience aléatoire ayant N issues possibles S_1, S_2, ..., S_N. Une ***marche aléatoire*** *sur $E = \{S_1, S_2, S3, \ldots, S_N\}$ est une suite de variables aléatoires (X_n) prenant chacune pour valeurs les différents états possibles, telle que l'état du processus à l'instant $(n+1)$ ne dépend que de celui à l'instant n précédent, mais non de ses états antérieurs, et ceci indépendamment de n.*

X_n	S_1	S_2	$\ldots$	$\ldots$	S_N
$P(X_n = S_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	$\ldots$	p_N

Définition:
*La loi de probabilité de X_n, qui donne la probabilité de chaque état à l'étape n, est appelée l'****état probabiliste à l'étape*** *n.*
On note U_n la matrice ligne :

$$U_n = (P(X_n = S_1)\, P(X_n = S_2)\, \ldots\, P(X_n = S_N))$$

Cette suite de matrices (U_n) décrit l'évolution du système. Ce processus est « sans mémoire ».

Définition:
La probabilité de passage de l'état i à l'état j en une étape est la probabilité conditionnelle $P_{X_n=i}(X_n + 1 = j)$.
On la note $p_{i,j}$.
La matrice dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est $p_{i,j}$ est ***la matrice de la transition de la marche aléatoire****.*

Propriété:
Par définition de cette matrice :

- *tous ses éléments $p_{i,j}$ sont compris entre 0 et 1 ;*
- *la somme des éléments de chaque ligne est 1.*

Définition:
A toute marche aléatoire, on peut associer un graphe probabiliste. Ce graphe est construit de la façon suivante :

- *les états sont représentés par des points : ce sont les sommets du graphe ;*
- *le passage d'un état à un autre est symbolisé par un arc orienté reliant deux sommets (un sommet pouvant être relié à lui même) : ce sont les arrêtes du graphe ;*
- *sur chaque arc orienté de l'état i vers l'état j est noté la probabilité $p_{i,j}$.*

Exercice:
Dessiner le graphe d'une marche aléatoire à trois états dont la matrice de transition est $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$