Devoir bilan 2 - Spécialité		
Enseignant : GREAU D. **Date** : 25/11/2015	**Nom** : **Prénom** : **Classe** :	**Note** :

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation !

Exercice 1: 6 points

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2. Déterminer les matrices suivantes :

$M_1 = 3A - 2B + I_2$

$M_2 = AB$

$M_3 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} B$

Exercice 2: 14 points

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y. D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année $2014 + n$, **exprimées en millions d'euros**.

On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros. L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 0,6x_n + 0,15y_n + 1 \\ y_{n+1} &= 0,2x_n + 0,4y_n + 3 \end{cases}$$

1. On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne B tels que pour tout entier n, $U_{n+1} = AU_n + B$
2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
3. On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer la matrice PDQ.
   b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP puis déterminer les produits QP et PQ.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.
4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que $B - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.
   c. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.
5. Soit n un entier naturel. On admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5\,(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}.$$

   a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.
   b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.