

Devoir bilan 4 - Spécialité

Enseignant : GREAU D. Date : 18/05/2016 Horaire : 9H00-10H00	Nom : Prénom : Classe :	Note :
---	--	---------------

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M . On le note $\det(M)$. Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

- Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M .

- On considère l'équation

$$(E) : \det(M) = 3$$

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a ; b)$ solutions de l'équation (E) .

a. Vérifier que le couple $(6 ; 3)$ est une solution de (E) .

b. Montrer que le couple d'entiers $(a ; b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a - 6) = 5(b - 3)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Partie B

- On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q .

- Codage avec la matrice Q :

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : A la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : } \text{JE} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{OF}.$$

Le mot JE est codé en le mot OF. Coder le mot DO.

- Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage. Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

- Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 & \equiv & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & \equiv & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$

- En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$

- Décoder le mot SG.