Devoir maison 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

On cherche à répondre à la question suivante : **Combien de points à coordonnées entières appartiennent à $\mathcal{E}$?**

I. Observation

1. Tracer l'ensemble des points qui vérifient $\mathcal{E}$ à l'aide du logiciel GeoGebra.
2. En déduire dix points à coordonnées entières appartenant à $\mathcal{E}$.

II. De proche en proche

A tout point $M(x;y)$ on associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' &=& 2x+3y \\ y' &=& x+2y \end{cases}$$

Soit $P_0(1;0)$. On nomme P_1 le point associé à P_0 puis P_2 le point associé à P_1 et ainsi de suite.

1. Déterminer les coordonnées de P_1, P_2 et P_3. Qu'observe-t-on ?
2. Démontrer que si $M \in \mathcal{E}$ alors $M' \in \mathcal{E}$.
3. En déduire deux nouveaux points à coordonnées entières positives appartenant à $\mathcal{E}$.
4. Démontrer que si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x' > x$ et $y' > y$.
5. En déduire combien de points à coordonnées entières appartiennent à $\mathcal{E}$.

III. Étude matricielle

On considère les vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice carrée A tel que $X' = A \times X$.
2. Pour tout entier n, on note P_n le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   a. Exprimer $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   b. En déduire $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   c. Déterminer les puissances successives de A pour $n \in [6;8]$. En déduire P_6, P_7 et P_8.
   d. Déterminer les coordonnées de P_{15}.

IV. Approche historique

L'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ avec x et y à coordonnées entières est une équation dite de Pell-Fermat. Donner l'historique de la recherche des solutions de ce type d'équations (10 à 12 lignes).