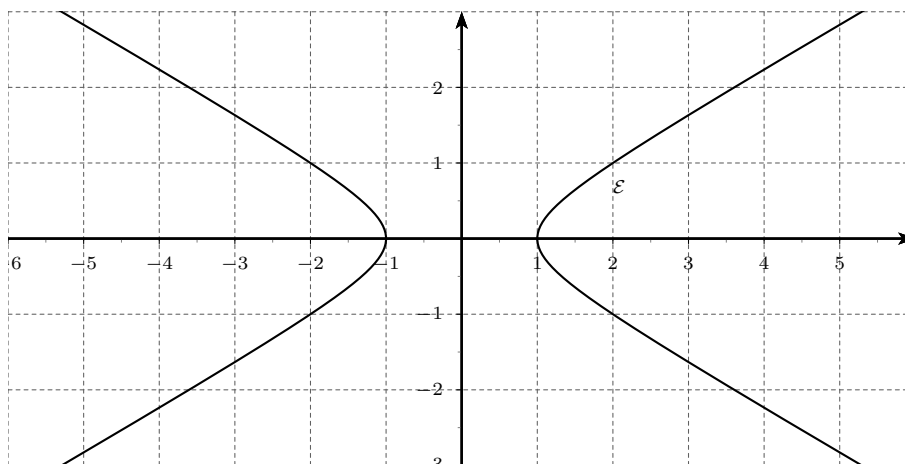


Corrigé du devoir maison 2

I. Observation

1. Voir ci-dessous :



2. les points de coordonnées suivantes appartiennent à $\mathcal{E}$:

$$(1; 0) \quad ; \quad (2; 1); \quad (-2; 1); \quad (-2; -1); \quad (2; -1); \quad (7; 4); \quad (-7; 4); \quad (-7; -4); \quad (7; -4); \quad (-1; 0)$$

II. De proche en proche

1. $P_1(2; 1)$, $P_2(7; 4)$ et $P_3(26; 15)$. Or $26^2 - 3 \times 15^2 = 1$ donc ces trois points appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. Soit $M(x; y) \in \mathcal{E}$ alors $x^2 - 3y^2 = 1$. De plus $M'(2x + 3y; x + 2y)$ donc :

$$\begin{aligned} (2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 3x^2 - 12xy - 12y^2 \\ &= x^2 - 3y^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $M' \in \mathcal{E}$.

3. Ainsi $P_4(97; 56)$ et $P_5(362; 209)$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

4. Si $x > 0$ et $y > 0$ alors $2x + 3y > 2x > x$ et $x + 2y > 2y > y$ donc $x' > x$ et $y' > y$.

5. En utilisant le procédé ci-dessus, on peut obtenir une infinité de point de $\mathcal{E}$ à coordonnées entières.

III. Étude matricielle

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. a. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

b. Par une récurrence immédiate, on obtient que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c. $A^6 = \begin{pmatrix} 1351 & 2340 \\ 780 & 1351 \end{pmatrix}$, $A^7 = \begin{pmatrix} 5042 & 8733 \\ 2911 & 5042 \end{pmatrix}$ et $A^8 = \begin{pmatrix} 18817 & 32592 \\ 10864 & 18817 \end{pmatrix}$ donc $P_6 = A^6 P_0 = \begin{pmatrix} 1351 \\ 780 \end{pmatrix}$, $P_7 = A^7 P_0 = \begin{pmatrix} 5042 \\ 2911 \end{pmatrix}$ et $P_8 = A^8 P_0 = \begin{pmatrix} 18817 \\ 10864 \end{pmatrix}$.

d. $P_{15} = A^{15} P_0 = \begin{pmatrix} 189750626 \\ 109552575 \end{pmatrix}$.

IV. Approche historique

L'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ avec x et y à coordonnées entières est une équation dite de Pell-Fermat. Ce type d'équations a été étudié de différentes façons depuis l'antiquité, en Grèce, en Inde, par les mathématiciens arabes. Elles portent le nom de John Pell (1611-1685) et de Pierre de Fermat (1601-1665). La solution générale et définitive ne sera trouvée qu'au XIX siècle à la suite de travaux des mathématicien Gauss, Dirichlet, Dedekind et Kummer. Sa résolution générale passe par l'étude de structures algébriques qui dépasse le cadre du programme de terminale S.