

Devoir maison 3

Exercice 1:

6 points

Répondre aux questions suivantes à l'aide de la notion de congruence :

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 1111^{11} par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2368^{23} par 9.
3. Rappeler et démontrer le critère de divisibilité par 11. 178236432 est-il divisible par 11 ?
4. L'entier $196572^{2014} - 23456^{1007}$ est-il divisible par 11.

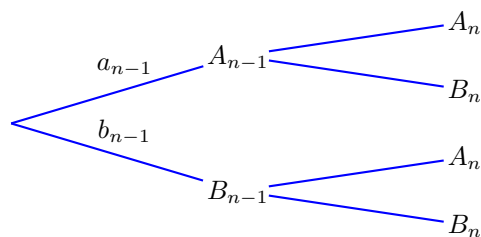
Exercice 2:

14 points

Deux enseignes concurrentes A et B se partagent l'intégralité d'un marché. En 2014, 92% des clients se fournissent dans les magasins A et 8% se fournissent dans les magasins B . On suppose que, chaque année, 5% des clients des magasins A décident de se fournir chez B et que 1% des clients des magasins B décident de se fournir chez A . Le nombre total de clients restant constant, on note :

- a_n la probabilité de l'événement A_n : « un client choisi au hasard l'année $(2014+n)$ se fournit dans les magasins A » ;
- b_n la probabilité de l'événement B_n : « un client choisi au hasard l'année $(2014+n)$ se fournit dans les magasins B ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. En déduire que pour tout entier n non-nul, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ où M est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.
3. En déduire $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M et $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer a_{10} et b_{10} . Interpréter ces résultats.
5. a. Soit $P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer PQ et QP .
 b. Montrer que $QMP = D$ où D est une matrice carrée diagonale d'ordre 2 à déterminer.
 c. Montrer que pour tout entier n non-nul, $M^n = PD^nQ$.
 d. En déduire que $M^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 5 \times 0,94^n & 1 - 0,94^n \\ 5 - 5 \times 0,94^n & 5 + 0,94^n \end{pmatrix}$
6. En déduire une expression de a_n en fonction de l'entier naturel n .
7. Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n) . Conclure