Corrigé du devoir maison 4

Exercice 1: 6 points

1. Pour $n = 140$:
$d = 2 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 2$ divise $140 \Rightarrow$ on affiche $2 \Rightarrow n$ prend la valeur $70 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 2$ divise $70 \Rightarrow$ on affiche $2 \Rightarrow n$ prend la valeur $35 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 2$ ne divise pas $35 \Rightarrow d$ prend la valeur $3 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 3$ ne divise pas $35 \Rightarrow d$ prend la valeur $4 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 4$ ne divise pas $35 \Rightarrow d$ prend la valeur $5 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 5$ divise $35 \Rightarrow$ on affiche $5 \Rightarrow n$ prend la valeur $7 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vraie}} \Rightarrow 5$ ne divise pas $7 \Rightarrow d$ prend la valeur $6 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 6$ ne divise pas $7 \Rightarrow d$ prend la valeur $7 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est vrai}} \Rightarrow 7$ divise $7 \Rightarrow$ on affiche $7 \Rightarrow n$ prend la valeur $1 \Rightarrow \boxed{n > 1 \text{ est faux}} \Rightarrow$ Fin de l'algorithme.
2. Cet algorithme donne la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre n. Dans l'exemple ci-dessus, $n = 2^2 \times 5 \times 7$.
3. Pour $n = 140$:
Pour i de 1 à 11 on a :
$i = 1$ divise 140 donc on affiche 1 et $140 \Rightarrow i = 2$ divise 140 donc on affiche 2 et $70 \Rightarrow i = 3$ ne divise pas $140 \Rightarrow i = 4$ divise 140 donc on affiche 4 et $35 \Rightarrow i = 5$ divise 140 donc on affiche 5 et $28 \Rightarrow i = 6$ ne divise pas $140 \Rightarrow i = 7$ divise 140 donc on affiche 7 et $20 \Rightarrow i = 8$ ne divise pas $140 \Rightarrow i = 9$ ne divise pas $140 \Rightarrow i = 10$ divise 140 donc on affiche 10 et 14 $\Rightarrow i = 11$ ne divise pas 140
Fin de la boucle pour et fin de l'algorithme.
4. Cet algorithme donne la liste des diviseurs d'un nombre n. Dans l'exemple ci-dessus, $D(140) = \{1; 2; 4; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 35; 70; 140$

Exercice 2: 10 points

1. a. Si n est un multiple de 10, $n = 10k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $N = 10000k^4 + 4 = 4\left(2500k^4 + 1\right)$ d'où N est multiple de 4.
   b. Tableau de congruences modulo 5 :

n (5)	0	1	2	3	4
N (5)	4	0	0	0	0

   On obtient donc que N est multiple de 5 si et seulement si n n'est pas multiple de 5.
   c. Pour le cas particulier $n = 1$, $N = 5$ est premier et est multiple de 5.
   Sinon, N ne peut être premier que si n est multiple de 5 (question 1b) et n n'est pas multiple de 10(question 1c).
   d. Pour $n = 5$, $N = 17 \times 37$, pour $n = 15$, $N = 197 \times 257$ et pour $n = 25$, $N = 577 \times 677$.
   Les valeurs obtenues pour N lorsque $n = 5$; 15 et 25 ne sont donc pas des nombres premiers !
2. a. Il suffit de développer le membre de droite (sans se tromper) !
   b. Si n est un multiple de 5, $n = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc

$$N = \left((5k)^2 + 2 \times 1 + 2 \times 5k \times 1\right)\left((5k)^2 + 2 \times 1 - 2 \times 5k \times 1\right)$$

   soit

$$N = \left(25k^2 + 10k + 2\right)\left(25k^2 - 10k + 2\right)$$

   c. Pour n multiple de 5 et non-multiple de 10 (soit k impair), N est produit de de deux nombres distincts de 1. En effet,

$$N = \left(1 + (5k + 1)^2\right)\left(1 + (5k - 1)^2\right)$$

   avec $1 + (5k + 1)^2 > 1$ et $1 + (5k - 1)^2 > 1$ puisque $k \geq 1$ donc N n'est pas premier.
   Ainsi, N n'est premier que pour $n = 1$!
3. Sophie Germain (1776-1831) est une des premières femmes mathématiciennes. Brillante autodidacte, estimée par quelques uns de ses pairs, elle s'est toutefois heurtée à l'intransigeance de son époque envers les femmes savantes.

Exercice 3: 4 points

Pour le premier système, $S = \{(1; 0)\}$
Pour le second système, les deux équations sont proportionnelles donc tous les points de la droite d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{2}$ sont solutions du système.
Pour le troisième système, en effectuant $2l_1 + L_2$, on obtient $5 = 0$ donc le système n'a pas de solution.