

Devoir maison 6

On considère les trois plans **distincts** $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On va chercher à déterminer l'intersection commune éventuelle de ces trois plans.

Étude théorique

1. Comment peut-on démontrer que deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
2. Que peut-on dire de l'intersection des trois plans si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ?
3. On se place dans le cas où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
 - a. Déterminer la nature de l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On la nommera Δ
 - b. Que peut-on dire de l'intersection des trois plans si $\mathcal{P}_3$ et Δ sont strictement parallèles ?
 - c. Que peut-on dire de l'intersection des trois plans si $\Delta \subset \mathcal{P}_3$?
 - d. Que peut-on dire de l'intersection des trois plans si Δ et $\mathcal{P}_3$ ne sont pas parallèles ?
4. On remarque que chercher l'intersection de ces trois plans, c'est résoudre un système (S) de trois équations à trois inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

- a. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer A la matrice carrée d'ordre 3 et B la matrice colonne de taille 3 telles que $(S) \iff AX = B$
- b. Que peut-on dire de l'intersection des trois plans si A est inversible ?

Applications

1. Dans chaque cas, déterminer l'intersection éventuelle des trois plans.
 - a. $\mathcal{P}_1 : x + 2y + 3z + 4 = 0$, $\mathcal{P}_2 : 2x + y + 3z - 2 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : 3x + 2y + z = 0$.
 - b. $\mathcal{P}_1 : x + y + z + 4 = 0$, $\mathcal{P}_2 : 2x + 2y + 2z = 0$ et $\mathcal{P}_3 : 3x + 2y + z = 0$.
 - c. $\mathcal{P}_1 : 2x + y + z + 2 = 0$, $\mathcal{P}_2 : x - y + 3z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : 3x + 6y - 6z + 3 = 0$.
2. Déterminer l'intersection éventuelle des quatre plans suivants : $\mathcal{P}_1 : x + y - 1 = 0$, $\mathcal{P}_2 : x + y + z - 2 = 0$, $\mathcal{P}_3 : y + z - 3 = 0$ et $\mathcal{P}_4 : 3x - 7y + 9z + 8 = 0$.