

Des nombres particuliers

Nombres de Fermat

Pour tout entier naturel n , on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. F_n est appelé nombre de Fermat.¹

1. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 . Lesquelles sont premiers ?
2. F_5 est-il premier ?
3. On admet que deux nombres de Fermat distincts n'ont pas de facteur premier commun. En déduire l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers.

Nombres de Mersenne

Pour tout entier naturel non-nul n , on pose $M_n = 2^n - 1$. M_n est appelé nombre de Mersenne.²

1. Calculer M_1, M_2, M_3 et M_4 . Lesquelles sont premiers ?
2. Pour a entier distinct de 1 et pour n entier naturel au moins égal à 2, montrer l'implication « si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ ».
3. Montrer l'implication suivante : « Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si d divise n alors M_d divise M_n ».
4. Montrer l'implication suivante : « Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si n est composé alors M_n est composé ».
5. Énoncer la contraposée de l'implication précédente puis la réciproque de cette contraposée. Cette réciproque est-elle vraie ?

1. Pierre de Fermat (1605-1665) était un mathématicien français. On lui doit de nombreux travaux en théorie des nombres

2. Marin Mersenne (1588-1648) était un religieux français, mathématicien et philosophe. On lui doit les premières lois de l'acoustique, qui portèrent longtemps son nom. Il établit en même temps que Galilée la loi de la chute des corps dans le vide.