Chapitre 4: Matrice inverse

1 Matrice inverse

Définition:

Soit une matrice carrée d'ordre n . S'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$ alors la matrice A est dite inversible.

Exemple:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc A est inversible.

Propriété:

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

B est l'unique matrice qui vérifie ces deux égalités. Cette matrice B est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1} :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Remarque:

Il existe des matrices carrées non-inversibles. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

En effet, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, s'il existe B tel que $AB = BA = I_2$ alors $BA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ soit $I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Propriété:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2 Systèmes linéaires

On considère le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x + 4y = 11 \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

Un tel système est appelé système linéaire.

Propriété:

Si un système linéaire a pour écriture matricielle $AX = B$, où A est une matrice inversible d'ordre n et B est une matrice colonne à n lignes alors ce système possède une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Dans l'exemple ci-dessus A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

donc la solution du système $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x + 4y = 11 \end{cases}$ est $X = A^{-1}B$ soit $\begin{pmatrix} \frac{67}{13} \\ \frac{19}{13} \end{pmatrix}$