Matrice inverse

Définition:
Soit une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$ alors la matrice A est dite inversible.

Exercice 1:
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -19 & 5 \end{pmatrix}$ quatre matrices carrées d'ordre 2.

1. Déterminer les produits AB, BA, CD et DC.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2:
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ deux matrices carrées. Déterminer A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 3:
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

1. Déterminer les produits $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Supposons qu'il existe B une matrice carrée d'ordre 2 tel que $AB = BA = I_2$.
   a. Déterminer les produits $BA\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $BA\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   b. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4:
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 avec a, b, c et d des nombres réels.

1. Déterminer les produits $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}A$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5:
On considère la fonction polynôme du second degré f tel que $f(2) = 3$, $f(4) = 1$ et $f(6) = 5$.

1. Montrer qu'il existe A une matrice carrée d'ordre 3 tel que $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer le produit $A\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -10 & 16 & -6 \\ 24 & -24 & 8 \end{pmatrix}$. En déduire la matrice A^{-1}.
3. Déterminer l'expression de f.
4. Déterminer la fonction polynôme du second degré g tel que $g(1) = -1$, $g(-1) = 2$ et $g(3) = 8$.

Exercice 6:
On s'intéresse à la somme $S_p(n)$ suivante pour $p \in \mathbb{N}^\star$ fixé et $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$S_p(n) = 1^P + 2^P + \cdots + n^P$$

1. Déterminer $S_1(n)$.
2. Démontrer que pour tout entier n non-nul, $S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
3. Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur $S_p(n)$?
4. Déterminer une expression possible de $S_3(n)$.
5. Démontrer que pour tout entier n non-nul, $S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$