

Résoudre un système linéaire

Définition:

On appelle système linéaire à n équations et n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \dots = \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

où $y_k \in \mathbb{R}$ pour tout k entier tel que $1 \leq k \leq n$ et $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tous i et j entiers tels que $1 \leq i, j \leq n$.

1. Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous par combinaison ou par substitution :

a. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 7y = 8 \\ -5x + 6y = -3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = -11 \\ -6x + 4y = 9 \end{cases}$

2. Déterminer les matrices inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer les produits matriciels $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{6}{23} & -\frac{7}{23} \\ \frac{5}{23} & -\frac{2}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4. Quel lien existe-t-il entre ces trois questions ?

5. En déduire la solution du système ci-dessous :

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 3 \\ x + 2y - 3z - t = 7 \\ x + 3y + 2z + t = 9 \\ -2x - 2y - z - 2t = -4 \end{cases}$$

6. Déterminer la solution du système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \dots = \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

si la matrice carrée A d'ordre n de coefficients $a_{i,j}$ est inversible.

7. Une usine fabrique trois sortes d'articles a, b et c utilisant des quantités de matières premières indiquées dans le tableau ci-dessous :

	article a	article b	article c
métal (kg)	3	2,4	2
peinture (kg)	0,4	0,2	0,2
plastique (kg)	0,4	0,5	0,8

Déterminer les nombres d'articles produits sachant que 8784 kg de métal ; 973,6 kg de peinture et 2174,8 kg de plastique ont été utilisés.