

Évolution d'une population de chamois

La population de chamois dans un parc se partage en deux classes d'âge, les « jeunes » et les « vieux ». On note :

- j_n le nombre d'animaux « jeunes » l'année de rang n ;
- v_n le nombre d'animaux « vieux » l'année de rang n .

De plus, on suppose que :

- 50% des animaux « jeunes » passent dans la classe des « vieux » d'une année à l'autre ;
- le taux de mortalité est de 25% dans la classe des « jeunes » et de 75% dans la classe des « vieux » ;
- le taux de natalité est de 200% dans la classe des « vieux », les « jeunes » n'étant pas encore en mesure de se reproduire.

Enfin, on introduit chaque année dans le parc 20 jeunes chamois supplémentaires.

En début d'étude, c'est à dire l'année de rang 0, il y a 400 jeunes chamois et 100 vieux chamois.

1 Étude à l'aide du tableur

1. Montrer que $j_1 = 320$ et $v_1 = 225$.
2. Exprimer j_{n+1} et v_{n+1} en fonction de j_n et v_n .
3. A l'aide d'un tableur, déterminer les valeurs de j_n , v_n et $\frac{j_n}{v_n}$ pour n entre 0 et 25.
4. Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre ?

2 Étude à l'aide de matrices

Soit U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} j_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer les matrices A et B tels que $U_{n+1} = A \times U_n + B$.
2. Démontrer qu'il existe une unique matrice C telle que $C = AC + B$ puis déterminer C .
3. Démontrer que pour tout entier n , $V_{n+1} = A \times V_n$ où $V_n = U_n - C$.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.
5. En déduire A^n pour tout entier naturel n .
6. Pour tout entier naturel n , déterminer V_n puis U_n .
7. En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$j_n = 340 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{660}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{240}{7}$$

et

$$v_n = 170 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{330}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{160}{7}$$

8. Étudier le comportement asymptotique de j_n , v_n et $\frac{j_n}{v_n}$.