Transformations et matrices

1 Symétrie et matrices

A l'aide du logiciel GeoGebra, on va observer le comportement d'une transformation définie par une matrice sur un objet dans le plan.

1. Ouvrir GeoGebra puis insérer une image (préalablement téléchargée sur votre espace personnel) à l'aide de l'outil **Insérer Image**. Cette image est nommé **image1** par défaut.
2. Placer le point A en $(2;2)$ et le point B en $(6;2)$.
3. Entrer la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en entrant dans la zone de saisie $C = \{\{-1, 0\}, \{0, 1\}\}$.
4. On va transformer cette image par la matrice C en entrant **AppliquerMatrice[C, image1]** dans la zone de saisie. Quelle transformation semble-t-elle avoir appliquée à l'image ?
5. Placer un point D dans le plan puis créer le point D' en entrant dans la barre de saisie $D' = C * D$. Déplacer le point D dans la plan. Que peut-on remarquer sur les coordonnées de D et D' ?
6. Soit $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Exprimer les coordonnées de D' en fonction des coordonnées de D et justifier l'effet de la matrice C sur l'image.
7. Modifier C par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis par $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et reconnaitre successivement les transformations associées à ces matrices.
8. On va prendre à présent pour matrice $C = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$
   a. Modifier C en conséquence sur GeoGebra.
   b. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   c. On considère le triangle ODD'. Déterminer DO^2, $D'D^2$ et $D'O^2$ en fonction de x et y. En déduire que ce triangle est rectangle isocèle en D'.
   d. Déterminer le rapport $\dfrac{OD'}{OD}$ et l'angle $\widehat{DOD'}$. Quelle effet produit cette matrice sur l'image ?

2 La courbe du dragon ou dragon de Heighway

A l'aide du logiciel Algobox, on va tracer la courbe du dragon qui est obtenu de la manière suivante :

- Le premier point est $O(0;0)$;
- A partir de ce point O, chaque point est obtenu à partir de son prédécesseur en appliquant une transformation se traduisant par une relation matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + V$$

Pour chaque nouveau point, on choisit au hasard et de façon équiprobable l'une des deux transformations f_1 ou f_2 suivantes :

- Pour f_1, $C_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- Pour f_2, $C_2 = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire sur Algobox un algorithme qui créer une suite de 10000 points.

   En cas de difficultés, ouvrir le fichier 1516_TS_spe_ch6_transformation_barnsley.alg qui permet de construire de manière analogue la fougère de Barnsley (on pourra tester ce programme avec $n = 1000$).

2. Déterminer le principe de construction de la fougère de Barnsley.