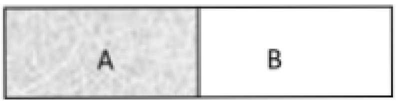
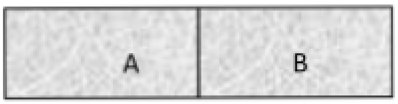
L'urne d'Ehrenfest

En 1907, les époux Ehrenfest introduisent un modèle probabiliste qui permet de décrire l'évolution de la pression d'un gaz (une évolution macroscopique [1] irréversible dans le temps) par l'évolution microscopique [2] réversible des molécules composant ce gaz.

Tout commence par l'observation suivante : on prend une enceinte hermétique séparée en deux compartiments de taille égale reliés entre eux par un fin tuyau. Laissant vide le compartiment B, on remplit le compartiment A d'un gaz quelconque et on observe la suite des événements.



Assez rapidement, les molécules de gaz vont migrer du compartiment A vers le compartiment B, jusqu'à l'établissement d'une situation d'équilibre.



En moyenne, le nombre de molécules dans chaque compartiment sera identique, même si rien n'empêche les molécules de circuler d'un côté à l'autre. Alors même qu'aucun phénomène physique au niveau moléculaire n'empêcherait toutes les particules de revenir dans leur compartiment d'origine, force est de constater que cela ne se produit pas au niveau macroscopique.

C'est sur ce paradoxe que les époux Ehrenfest se sont penchés au début du XXème siècle, en imaginant un modèle qui simplifie à l'extrême celui de la diffusion des gaz. Les deux compartiments sont remplacés par deux urnes, dont on remplit la première de N boules numérotées en laissant la deuxième vide.

On tire ensuite de façon totalement aléatoire un numéro entre 1 et N et la boule désignée change d'urne. L'opération se répète un grand nombre de fois et on consigne les résultats.

Simulations

1. Étudier à l'aide d'un tableur le modèle d'Ehrenfest pour $N = 2$, $N = 4$, $N = 8$ et $N = 100$ en réalisant à chaque fois 500 tirages. On pourra représenter le nombre de boules dans chaque urne en fonction du temps.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de N le phénomène est-il réversible ?

Étude théorique

1. On considère le cas $N = 2$. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans l'urne A à l'issue de n tirages et E_n la matrice ligne :
$$\begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$$
   a. Déterminer E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4.
   b. En déduire E_n selon la parité de n. Est-ce que le nombre de molécules se stabilise dans les urnes ?

1. Une propriété macroscopique est une caractéristique d'un corps qui peut être observée en l'observant globalement.
2. Une propriété microscopique est une caractéristique d'un corps qui peut être observée en regardant les plus petits constituants de ce corps.

2. On considère le cas $N = 4$. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans l'urne A à l'issue de n tirages et E_n la matrice ligne :

$$\begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

   a. Déterminer E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4.
   b. Pour $j \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, exprimer $P(X_{n+1} = j)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et $P(X_n = 4)$.
   c. Déterminer la matrice carrée A telle que $E_{n+1} = E_n \times A$.
   d. En déduire E_n en fonction de A et E_0.
   e. A l'aide de votre calculatrice, déterminer E_4, E_5, E_{10}, E_{50} et E_{51}. Est-ce que le nombre de molécules se stabilise dans les urnes ?
   f. Pour tout entier n, démontrer par récurrence que pour n pair et non-nul :

$$E_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

   et pour n impair :

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} & 0 \end{pmatrix}$$

   g. A l'aide du résultat précédent :
      i. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E_{2n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} E_{2n+1}$.
      ii. Déterminer $E(X_n)$ pour tout entier n non-nul.
3. Réaliser la même étude pour $N = 3$.