

## Théorèmes de Fermat

### I Petit théorème de Fermat

**Théorème:**

Soit  $n$  un entier. Si  $p$  est un nombre premier ne divisant pas  $n$ , alors  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $342^{10}$  par 11.
2. Démontrer que  $123568^6 - 1$  est divisible par 7.
3. Quels sont les entiers  $n$  tels que  $n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$  ?
4. Quels sont les entiers  $n$  tels que  $n^{60} \equiv 1 \pmod{77}$  ?

### II Corollaire du petit théorème de Fermat

1. A l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de congruence suivant :

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$n^7 \pmod{7}$							

2. Démontrer le corollaire du petit théorème de Fermat :

**Théorème:**

Soit  $n$  un entier et  $p$  est un nombre premier, alors  $n^p \equiv n \pmod{p}$

3. Démontrer que  $n^5 - n$  est divisible par 5 pour tout entier  $n$ .
4. Démontrer que  $n^{11} - n$  est divisible par 33 pour tout entier  $n$ .

### III Grand théorème de Fermat

**Théorème:**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égale à 3. Il n'existe pas de nombres entiers non nuls  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que :

$$x^n + y^n = z^n$$

1. Démontrer à l'aide d'exemples pourquoi ce théorème est faux pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .
2. Déterminer l'historique de la démonstration de ce théorème.