

Théorème de Gauss

1 Théorème de Gauss

Théorème: (Théorème de Gauss)

Soit a , b et c trois entiers. Si a divise le produit bc et si a est premier avec b alors a divise c .

1. A l'aide du théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
2. Trouver dans chaque cas un exemple qui illustre les propriétés suivantes issues du théorème de Gauss puis démontrer ces propriétés.
 - a. Si un entier est divisible par des entiers a et b premiers entre-eux alors il est divisible par le produit ab .
 - b. Si un entier premier divise un produit de facteurs ab alors il divise au moins l'un des facteurs a ou b .
 - c. Si un entier premier p divise un produit de facteurs premiers alors il est égal à l'un d'eux.
 - d. Un entier p est premier avec les entiers a et b si et seulement si p est premier avec le produit ab .

2 Applications

1. Déterminer les nombres x et y tels que $13x = 21y$.
2. Déterminer les nombres x et y tels que $8x + 9y = 1$.
3. Déterminer les nombres x et y tels que $8x + 9y = 2$.
4. Démontrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout entier n .
5. Démontrer que $n^4 - n^2$ est divisible par 12 pour tout entier n .