Corrigé

Exercice 1:
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

On admet (on pourrait le montrer par récurrence) que cette suite est majorée par 6.

1. Pour tout entier naturel n on a : $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{avec} \quad u_n \leqslant 6 \\ &\geqslant -\frac{1}{2} \times 6 + 3 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$
   La suite (u_n) est donc croissante.
2. La suite (u_n) est croissante et majorée par 6 donc elle converge.

Exercice 2:
Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard. Elle révèle que, en notant p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$. De plus, le premier hiver, 40 % des personnes pratiquent le ski.

1. Pour tout entier naturel n le terme p_n est une probabilité donc est compris entre 0 et 1.
   La suite (p_n) est majorée par 1.
2. Pour tout entier naturel n notons $P(n)$ la propriété : $p_{n+1} \geqslant p_n$
   Démontrons par récurrence que $p(n)$ est vraie pour tout n.
   * Initialisation : $p_1 = 0,5 \times 0,4 + 0,3 = 0,5 \geqslant 0,4 = p_0$ la propriété est donc vraie au rang 0.
   * Hérédité : supposons $P(n)$ vraie et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
   $$\begin{aligned} p_{n+1} \geqslant p_n &\iff 0,5p_{n+1} \geqslant 0,5p_n \\ &\iff 0,5p_{n+1} + 0,3 \geqslant 0,5p_n + 0,3 \quad \text{Donc } P(n+1) \text{ est vraie.} \\ &\iff p_{n+2} \geqslant p_{n+1} \end{aligned}$$
   * Conclusion : d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} \geqslant p_n$.
3. La suite (p_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.
   (a) Notons l la limite de la suite (p_n).
   Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 0,5x + 0,3$. f. Pour tout entier naturel n $p_{n+1} = f(p_n)$.
   f est continue donc la suite $(f(up_n))$ converge vers $f(l)$ mais $(f(up_n)) = (p_{n+1})$ et donc converge vers l.
   l vérifie donc l'équation : $0,5l + 0,3 = l$ ce qui conduit à $l = 0,6$.
   (b) Au bout d'un grand nombre d'années, environ 60% des personnes pratiquent le ski de piste.

Exercice 3:
Soit (u_n) la suite vérifiant $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}$.

1. Étudions les variations de la fonction f définie sur $[1\,;\,2]$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.
   $f'(x) = \dfrac{2x - (2x-1) \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} > 0$. On a donc :

x	1	2
$f(x)$	1 ↗	$\frac{3}{2}$

2. Notons $P(n)$ la propriété $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   * Initialisation : $u_0 = 2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$ la propriété $P(0)$ est vérifiée.
   * Hérédité : supposons $P(n)$ vraie et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
   $$\begin{aligned} 1 \leqslant u_n \leqslant 2 &\iff f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2) \text{ car } f \text{ est croissante sur}[1\,;\,2] \\ &\iff 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{2} \\ &\iff 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 \qquad \text{Donc } P(n+1) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$
   * Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Pour tout entier naturel n notons $P(n)$ la propriété : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Démontons que $P(n)$ est vraie pour tout n par récurrence.
   * Initialisation : $u_1 = f(u_0) = f(2)\dfrac{3}{2} \leqslant u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : supposons $P(n)$ vraie et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leqslant u_n &\iff f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \text{ car } f \text{ est croissante sur}[1\,;\,2] \\ &\iff u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

* Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente.
5. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $[1\,;\,2]$ la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$.

   Donc l est solution de l'équation $l = \dfrac{2l-1}{l} \iff \dfrac{l^2-2l+1}{l} = 0 \iff l^2-2l+1=0 \iff (l-1)^2 = 0 \iff l = 1$.

   La suite (u_n) converge donc vers 1.

Exercice 4:

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

1. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   * Pour tout entier naturel n notons $P(n)$ la propriété : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   * Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 0$ et $v_0 = 3 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.

   * Hérédité : supposons $P(n)$ vraie et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

   $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$.

   De plus $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0$.

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   * Conclusion d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   (b) Pour tout entier naturel n :
   $$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \left(\sqrt{\frac{u_n^2+v_n^2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2 . \\ &= \frac{u_n^2+v_n^2}{2} - \frac{(u_n+v_n)^2}{4} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4} \\ &= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

   Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = (v_{n+1} - u_{n+1})(v_{n+1} + u_{n+1}) \geqslant 0$ avec $(v_{n+1} + u_{n+1}) \geqslant 0$.

   Donc pour tout entier naturel n : $(v_{n+1} - u_{n+1}) \geqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$

   Avec de plus $u_0 \leqslant v_0$ donc pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n$.
2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.