Corrigé

Exercice 1:

1. $\mathcal{D}$ passant par $A(5;-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3;1)$ donc une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x=5-t \\ y=-1+3t \\ z=1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Pour vérifier si le point $B(3;5;2)$ appartient à $\mathcal{D}$ il faut voir si le système $\begin{cases} 3=5-t \\ 5=-1+3t \\ 2=1+t \end{cases}$ admet une solution.

   Or ce système n'admet pas de solution car dans la première et la deuxième ligne $t=2$ mais dans la troisième $t=1$.
   Le point $B(3;5;2)$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

3. Toute parallèle à $\mathcal{D}$ admet le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par B est donc : $\begin{cases} x=3-t \\ y=5+3t \\ z=2+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. $\overrightarrow{CD}(2;-6;-2)=-2\vec{u}$ donc la droite (CD) est -elle parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 2:

1. Soit $A(1;3;4)$; $B(2;3;5)$ et $C(1;4;6)$ trois points de l'espace.
   (a) $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;2)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.
   (b) Une représentation paramétrique du plan (ABC) est : $\begin{cases} x=1+t \\ y=3 \quad +t' \\ z=4+t+2t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation paramétrique : $\begin{cases} x=6-k \\ y=-4+2k \\ z=1+k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$
   (a) Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-1;2;1)$.
   (b) Pour justifier que $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan (ABC) on peut montrer que les vecteurs $\vec{u}(-1;2;1)$, $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;2)$ ne sont pas coplanaires. Pour cela on montre qu'il n'existe pas de valeur a et b tels que $\vec{u}(-1;2;1)=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.
   (c) D'après ce qui précède le point I d'intersection de $\mathcal{D}$ et (ABC) existe, ces coordonnées $(x;y;z)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} x=6-k \\ y=-4+2k \\ z=1+k \\ x=1+t \\ y=3+t' \\ z=4+t+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} x=6-k \\ y=-4+2k \\ z=1+k \\ 6-k=1+t \\ -4+2k=3+t' \\ 1+k=4+t+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} x=6-k \\ y=-4+2k \\ z=1+k \\ t=5-k \\ t'=-7+2k \\ 1+k=4+(5-k)+2(-7+2k) \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=4 \\ t=2 \\ t'=-1 \\ k=3 \end{cases}$$

   Les coordonnées du point I d'intersection de $\mathcal{D}$ et (ABC) sont donc $(3\,;\,2\,;\,4)$.

Exercice 3:

1. La droite (IJ) passe par $I\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, et elle est dirigée par $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,1\right)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x=1-1\times t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times t \\ z=0+1\times t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, soit $\begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z=\quad t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2. La droite qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$, passe par le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$, c'est-à-dire K ; le vecteur de coordonnées $\left(a - \dfrac{3}{4} ; 1 ; -1\right)$ en est un vecteur directeur. Or $\vec{KL}\left(a - \dfrac{3}{4} ; 1 ; -1\right)$. C'est donc bien une représentation paramétrique de (KL).

3. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique pour $(t,\ t')$.

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} \\ z = t \\ x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} \\ z = t \\ 1 - t = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} \\ z = t \\ 1 - (1 - t') = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1 - t'}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} \\ z = t \\ t' = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1 - t'}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

On obtient finalement $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} \\ z = t \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ t' = \dfrac{1}{2} \\ t = 1 - t' \end{cases}$ qui a une solution si et seulement si $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(a - \dfrac{3}{4}\right) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Remarque : *Au passage,on a trouvé les coordonnées du point d'intersection des deux droites* $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

On a $t = t' = \dfrac{1}{2}$ *et on reporte pour avoir* x, y, z.

Exercice 4:

On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

On donne les points $A(1 ;\ 2;\ 0)$, $B(3 ;1 ;\ -1)$ et $C(7 ;2 ;\ -2)$

Proposition 1 : Vraie

Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques. Pour $t = 2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t = 1$ celles du point B.

Proposition 2 : Fausse

Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont parallèles ou sécantes.

* Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(2; 1; 3)$ il n'est pas colinéaires à $\overrightarrow{AB}(2; -1; -1)$ donc les droites $\mathcal{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.

* Montrons qu'elles ne sont pas sécantes.

Pour cela on résout le système : $\begin{cases} 2t = 5 - 2t' & (1) \\ 1 + t = t' & (2) \\ -5 + 3t = -2 + t' & (3) \end{cases}$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t - 6 = -2$ soit $t = 2$.

On remplace dans (2) : $t' = 1 + t = 3$.

On vérifie dans (1) : $2t = 4$, alors que $5 - 2t' = 5 - 6 = -1$. Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.

Puisque ces deux droites sont non parallèles et non sécantes, elles sont donc non coplanaires.

Proposition 3 : Fausse

On vérifie facilement que $E \notin \mathcal{D}$. En effet, si on résout le système : $\begin{cases} 8 = 2t \\ -3 = 1 + t \\ -4 = -5 + 3t \end{cases}$

On trouve que $t = 4$ dans la première équation, valeur qui ne convient pas dans la seconde équation.

Remarque : En utilisant une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ on pourrait montrer que $E \in \mathcal{P}$.