Corrigé

Exercice 1:

1. Si f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.
2. Si f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ alors $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.
3. Si f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ alors $F(b)-F(a)$ est égale à $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.

Exercice 2:

$f_1(x) = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$ est de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^2+x+1$. F_1 admet donc des primitives de la forme $\dfrac{1}{u}+c$ et après calcul de $F_1(3)=0$, on obtient que $F_1(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{13}$

$f_2(x)=(10x-2)\left(5x^2-2x+1\right)^4$ est de la forme $u'u^4$ avec $u(x)=5x^2-2x+1$. F_2 admet donc des primitives de la forme $\dfrac{1}{5}u^5+c$ et après calcul de $F_2(1)=0$, on obtient que $F_2(x)=\dfrac{1}{5}\left(5x^2-2x+1\right)^5-\dfrac{1024}{5}$

$f_3(x)=\dfrac{20x^3+10x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ est de la forme $\dfrac{5u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=1+x^2+x^4$. F_3 admet donc des primitives de la forme $5\times 2\sqrt{u}+c$ et après calcul de $F_3(0)=0$, on obtient que $F_3(x)=10\sqrt{1+x^2+x^4}-10$

Exercice 3:

A$= \displaystyle\int_0^3 4x^2+5x\mathtt{d}x = \left[\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{117}{2}$

B$= \displaystyle\int_1^2 x^2+\frac{1}{x^2}\mathtt{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{17}{6}$

C$= \displaystyle\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\mathtt{d}x = \left[6\sqrt{x}\right]_1^4 = 6$

D$= \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2+3\right)^{11}\mathtt{d}x = \left[\frac{(x^2+3)^{12}}{12}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{5^{12}}{12}-\frac{4^{12}}{12} = \frac{5^{12}-4^{12}}{12}$

Exercice 4:

1. $f(x)=x^2+x+1$ est un polynôme du seconde degré avec $\Delta<0$ et $a>0$. Ainsi sur $[0;+\infty[$, $f(x)\geq 0$ et est continue. On en déduit que $\Phi(x)$ est l'aire sous la courbe de f entre 0 et x.
2. $\Phi(3) = \displaystyle\int_0^3 4x^2+5x\mathtt{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^3 = \frac{33}{2}$
3. Par définition, $\Phi'(x)=f(x)$ et $f(x)\geq 0$ sur $[0;+\infty[$ d'où Φ est croissante sur $[0;+\infty[$.
4. $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x 4x^2+5x\mathtt{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$

Exercice 5:

L'aire sous la courbe de la fonction inverse entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=1$ et $x=a$ correspond à l'intégrale $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t}\mathtt{d}t$ puisque $\dfrac{1}{x}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

Résoudre ce problème revient à montrer que $f(x)=2$ admet une unique solution où f est la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathtt{d}t$.

On montre dans un premier temps que f est dérivable (donc continue) de dérivée $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ puisque $f'(x)>0$ sur $[1;+\infty[$. Or $f(1)=0$ par définition et à l'aide de la calculatrice, on obtient que $f(10)>2$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[1;10]$, on démontre que $f(x)=2$ admet un unique antécédent a.

Comme f est croissante sur $[1;+\infty[$, $f(x)=2$ admet un unique antécédent a sur $[0;+\infty[$ et à la calculatrice on obtient que $a\simeq 7,4$.