Corrigé

Exercice 1:

$a)$ $\exp(8)$	$b)$ $\exp(2)$	$c)$ $\exp(5)$
$d)$ $\exp(15)$	$e)$ e^6	$f)$ e^{-1}
$g)$ $e^4 - e^{-4}$	$h)$ $2e$	$i)$ $\sqrt{e}$

Exercice 2:

$a)$ 1	$b)$ e^{2x+2}	$c)$ e^{8-x}
$d)$ e^{10x}	$e)$ $-e^{9x}$	
$f)$ e^x		
$g)$ e^{-x}	$h)$ e^{-2x+1}	$i)$ 2

Exercice 3:

a) $f(x) = e^x + x^2 + 1$.
$f'(x) = e^x + 2x$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{1-e^x}{e^x} = e^{-x} - 1$
$f'(x) = -e^{-x}$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$

c) $f(x) = e^{-x} + x^{-1} = e^{-x} + \dfrac{1}{x}$
$f'(x) = -e^{-x} - \dfrac{1}{x^2}$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 4:

Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{2}{e^x} + e^{-1}$.

1. f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et : $$f'(x) = 2 + 2\frac{e^x}{(e^x)^2} = 2 + \frac{2}{e^x}$$
   Or $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.
   On a donc le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 1]$.

x	0	1
$f(x)$	$e^{-1} - 2$ $\nearrow$	$2 - e^{-1}$

2. f est continue, strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et 0 est compris entre $f(0)$e et $f(1)$ donc d'après le corollaire du TVI la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   Notons α le réel vérifiant $f(\alpha) = 0$. $\alpha \simeq 0,45$.

Exercice 5:

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$

1. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   $g'(0) = 0$ donc pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle et pour tout réel $x \in]-\infty; 0]$, $g'(x) \leqslant 0$
   Conclusion : g est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$ donc d'après les variations de g, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $g(x) \geqslant 0$.
3. On vient de démontrer que pour tout réel, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$ soit $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1$ d'où $\mathrm{e}^x - x > 0$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $\quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$

1. On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e} - 1} = 1$.
   Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$
   $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a. $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} =$
   $\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   b. La position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0\,;\,1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D).