Corrigé

Exercice 1:

1. Si f une fonction dérivable sur l'intervalle I alors pour tout réel $a \in I$, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
2. Si f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ alors la courbe de la fonction f admet en $A(a; f(a))$ une tangente non-verticale d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
3. Si f une fonction dérivable sur l'intervalle I alors f est une fonction continue sur l'intervalle I.

Exercice 2:

- $x^2 + x + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$.
  La tangente à la courbe en 1 a pour équation $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$
- f_2 est une fonction polynôme donc f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_2'(x) = (80x-16)\left(5x^2-2x+1\right)^7$.
  La tangente à la courbe en -1 a pour équation $y = -201326592x - 184549376$
- $x^4 + x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_3'(x) = \dfrac{x+2x^3}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$.
  La tangente à la courbe en 1 a pour équation $y = \sqrt{3}x$
- $x^2 + x + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4'(x) = \dfrac{-4x-2}{(x^2+x+1)^3}$.
  La tangente à la courbe en -2 a pour équation $y = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{5}{9}$

Exercice 3:
$e^x = -3x + 2 \Longleftrightarrow e^x + 3x - 2 = 0$.

- Soit f la fonction $x \longmapsto e^x + 3x - 2$.
  $f'(x) = e^x + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $0 \in \left] \lim_{x \to -\infty} f(x); \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient que $\alpha \simeq 0,242$

Exercice 4:
On démontre que la tangente en A qui a pour équation $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$ intersecte l'axe des abscisses en $B\,(2a; 0)$ et l'axe des ordonnées en $C\left(0; \dfrac{2}{a}\right)$ donc l'aire du triangle OBC est constant et vaut $\mathcal{A}_{OBC} = 2$.

Exercice 5:
On démontre que la tangente en A qui a pour équation $y = e^a x + e^a(1-a)$ intersecte l'axe des abscisses en $B\,(a-1; 0)$ et l'axe des ordonnées en $C\,(0; e^a(1-a))$ donc l'aire du triangle OBC vaut $\mathcal{A}_{OBC} = \dfrac{e^a(1-a)^2}{2}$.
On étudie les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2 e^x}{2}$ sur $]-\infty; 1]$.
f admet pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)(x+1)e^x$ qui est du signe de $x+1$ sur $]-\infty; 1]$ donc f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; 1]$ d'où l'aire du triangle OAC est maximale pour $a = -1$ et vaut alors $\dfrac{2}{e}$.

Exercice 6:
En utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires avec la fonction $f'(x) - g'(x) = e^x - 2x - \dfrac{3}{2}$ (comme dans l'exercice 3), on montre qu'il existe deux valeurs réels $\alpha_1 \simeq -0,4$ et $\alpha_2 \simeq 1,5$ pour lesquelles $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)$ sont égaux. Or après calculs, les tangentes aux deux courbes en ces valeurs n'ont pas les même équations réduites. La réponse est donc négative.