

Corrigé

Exercice 1:

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, de dérivée elle-même donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Exercice 2:

A l'aide des règles de calculs sur l'exponentielle, on a : $A = 2e^5$, $B = e^4$ et $C = 1 - e^6$

Exercice 3:

1. $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Sur $\mathbb{R}^*$, $e^{\frac{1}{x}+1} = \frac{e}{e^{x^2}} \iff e^{\frac{1}{x}+1} = e^{1-x^2} \iff \frac{1}{x} + 1 = 1 - x^2 \iff x^3 = -1 \iff x = -1$
3. $e^{x^2+3x} = 1 \iff x^2 + 3x = \ln(1) \iff x^2 + 3x = 0 \iff x \in \{-3; 0\}$

Exercice 4:

1. $e^x > 3$ pour $x \in]\ln(3); +\infty[$
2. $e^{x^2} < \frac{1}{e^{2x-3}} \iff e^{x^2} < e^{-2x+3} \iff x^2 < -2x+3 \iff x^2 + 2x - 3 < 0 \iff (x+3)(x-1) < 0 \iff x \in]-3; 1[$
3. $e^{x^2+3x} < 0$ n'admet pas de solution puisque $e^{x^2+3x} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5:

1. D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$
2. D'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x}{e^x} = 0$
3. D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x} = +\infty$

Exercice 6:

1. f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est du signe de $x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (2x - 3)e^{-x} - (x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 + 5x - 3)e^{-x}$. De plus, $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f' est du signe de $-x^2 + 5x - 3$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$	$\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 5x - 3$	$-$	$\emptyset$	$+$	$-$
$f(x)$				

4. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{e^x}$ donc par un raisonnement similaire à celui effectué dans l'exercice précédent (question 1 et 2) :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
5. $F(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x}$
6. $f(x) < 0$ sur $[0; 3]$ donc $\mathcal{A} = -\int_0^3 f(x)dx = 1 + \frac{5}{e^3}$