Corrigé

Exercice 1:

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{9u_n}$

On a démontré par récurrence, voir ci-dessous, que pour tout n ; $0 \leq u_n \leq 9$.

- * Pour tout entier naturel n on note $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 9$.
- * Initialisation : u_0 est compris entre 0 et 9 donc $P(0)$ est vraie.
- * Hérédité : On suppose que pour une valeur de n la propriété $P(n)$ est vraie, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \sqrt{9u_n}$ avec $0 \leq u_n \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 9u_n \leq 81$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{9u_n} \leq \sqrt{81} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0; +\infty[$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 9$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

- * Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . C'est à dire, pour tout entier naturel n ; $0 \leq u_n \leq 9$.

Exercice 2:

$$1. f'(x) = \frac{2 \times (x+1) - 2x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$; $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. * Pour tout entier naturel n on note $P(n)$ la propriété : $u_n \geq 1$.

* Initialisation : $u_0 = 3 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : On suppose que pour une valeur de n la propriété $P(n)$ est vraie, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \geq 1$

Or la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $f(u_n) \geq f(1)$ avec $f(1) = 1 \Rightarrow f(u_n) \geq 1$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

- * Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . C'est à dire, pour tout entier naturel n ; $u_n \geq 1$.

Exercice 3:

La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}$.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x + 3}{x + 2}$

Étudions les variations de f .

$$\text{Pour tout } x \in [0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{4 \times (x+2) - (4x+3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

f est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 3$

* Pour tout entier naturel n on note $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 3$.

* Initialisation : $u_0 \in]0; 1[$ donc $0 \leq u_0 \leq 3$, la propriété $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : On suppose que pour une valeur de n la propriété $P(n)$ est vraie, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $0 \leq u_n \leq 3$

Or la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$ avec $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f(3) = 3 \Rightarrow 0 < \frac{3}{2} \leq f(u_n) \leq 3$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

- * Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . C'est à dire, pour tout entier naturel n ; $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 4:

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = u_n + n$

Pour passer du terme u_n au suivant, u_{n+1} on ajoute à chaque fois n on peut donc conjecturer que la suite (u_n) a un lien avec la somme des premiers entiers.

$$u_0 = 0; u_1 = 0; u_2 = 1; u_3 = 3; u_4 = 6 \text{ donc il semble que pour tout } n; u_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démontrons cette propriété par récurrence.

* Pour tout entier naturel n on note $P(n)$ la propriété : $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

* Initialisation : $\frac{0 \times (0-1)}{2} = 0 = u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

* Hérité : On suppose que pour une valeur de n la propriété $P(n)$ est vraie, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } u_{n+1} = u_n + n \text{ avec } u_n = \frac{n(n-1)}{2} \text{ donc } u_{n+1} = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

D'où $P(n+1)$ est vraie

* Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

C'est à dire, pour tout entier naturel n ; $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.