Exercice 1:
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{9u_n}$

On a démontré par récurrence, voir ci-dessous, que pour tout n ; $0 \leqslant u_n \leqslant 9$.

Compléter les parties manquantes de cette démonstration par récurrence :

* Pour tout entier naturel n on note $P(n)$ la propriété : $\cdots\cdots$
* Initialisation : $u_{...}$ est compris entre 0 et 9 donc $P(\ \cdots\ )$ est vraie.
* Hérédité : On suppose que pour une valeur de n la propriété $P(n)$ est vraie, montrons qu'alors $P(\cdots)$ est vraie.

On a $\quad u_{n+1} = \sqrt{9u_n}\quad$ avec $\quad \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots$

$$\Rightarrow \cdots \leqslant 9u_n \leqslant \cdots$$
$$\Rightarrow \cdots \leqslant \sqrt{9u_n} \leqslant \cdots$$
$$\Rightarrow \cdots \leqslant u_{n+1} \leqslant \cdots$$

Donc $P(\ \cdots\ )$ est vraie
* Conclusion : ....

Exercice 2:
On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$. Démontrer que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$u_n \geqslant 1$$

Exercice 3:
La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n : $\quad 0 \leq u_n \leq 3$

Exercice 4:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = u_n + n$
Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

Plan de travail

Thème	Exercice	Niveau	Fait sans aide	Fait avec l'aide d'un élève	Fait avec l'aide du professeur
Rédaction d'une récurrence	Exercice 1	*			
Étude d'une fonction et récurrence	Exercice 2	**			
Étude d'une fonction et récurrence	Exercice 3	***			
Conjecturer une expression et la démontrer par récurrence	Exercice 4	***			