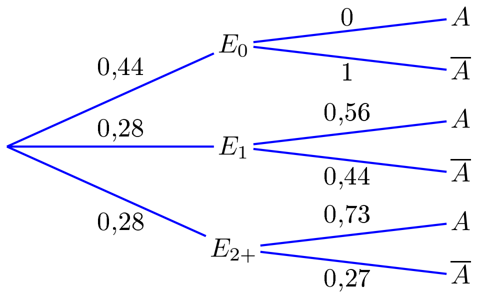
Corrigé

Exercice 1:

1. Arbre :



2. La probabilité que la personne choisie soit de la catégorie L1 et qu'elle ne parle pas « bien » l'anglais est :

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap \overline{A}) &= P(E_1) \times P_{E_1}\left(\overline{A}\right) \\ &= 0,28 \times 0,44 \\ &= 0,1232 \end{aligned}$$

3. La probabilité que la personne choisie ne parle pas « bien » l'anglais est d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) &= P(E_0 \cap \overline{A}) + P(E_1 \cap \overline{A}) + P(E_{2+} \cap \overline{A}) \\ &= 0,44 \times 1 + 0,28 \times 0,44 + 0,28 \times 0,27 \\ &= 0,6388 \end{aligned}$$

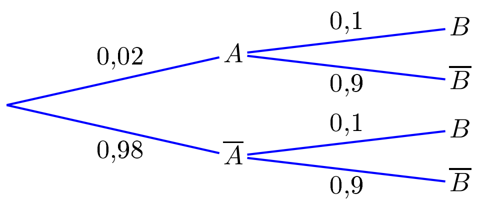
4. La probabilité que la personne soit de la catégorie L2+ sachant qu'elle parle « bien » l'anglais est :

$$\begin{aligned} P_A(E_{2+}) &= \frac{P(E_{2+} \cap A)}{P\left(A\right)} \\ &= \frac{0,28 \times 0,73}{1 - 0,6388} \\ &\simeq 0,5659 \end{aligned}$$

Exercice 2:
$P(A) = \dfrac{1}{8}$; $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$. On remarque que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Exercice 3:

1. Arbre



2. La probabilité que la montre ne présente aucun défaut est :

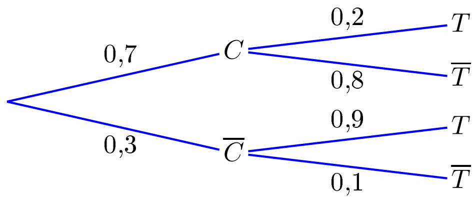
$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= 0,98 \times 0,9 \\ &= 0,882 \end{aligned}$$

3. La probabilité de l'événement C est :

$$\begin{aligned} P\left(C\right) &= P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= 0,02 \times 0,9 + 0,98 \times 0,1 \\ &= 0,116 \end{aligned}$$

Exercice 4:

1. Arbre :



2. La probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse est :

$$\begin{array}{rcl} P(C\cap T) & = & P(C)\times P_C(T) \\ & = & 0,7\times 0,2 \\ & = & 0,14 \end{array}$$

3. La probabilité que le terrain soit occupé est d'après la formule des probabilités totales :

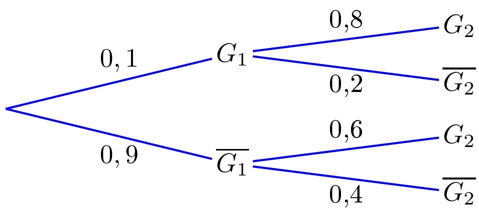
$$\begin{array}{rcl} P(T) & = & P(C\cap T)+P(\overline{C}\cap T) \\ & = & 0,7\times 0,2+0,3\times 0,9 \\ & = & 0,41 \end{array}$$

4. La probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé est :

$$\begin{array}{rcl} P_T(\overline{C}) & = & \dfrac{P(\overline{C}\cap T)}{P(T)} \\ & = & \dfrac{0,3\times 0,9}{0,41} \\ & \simeq & 0,6585 \end{array}$$

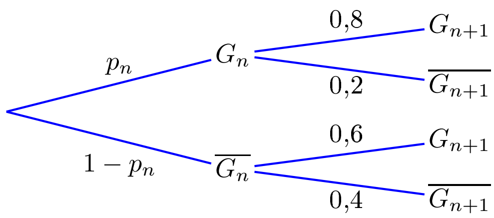
Exercice 5:

1. Arbre :



$$\begin{array}{rcl} p_2 & = & P(G_1\cap G_2)+P(\overline{G_1}\cap G_2) \\ & = & 0,1\times 0,8+0,9\times 0,6 \\ & = & 0,62 \end{array}$$

2. $P_{G_2}(\overline{G_1})=\dfrac{P(\overline{G_1}\cap G_2)}{P(G_2)}\simeq 0,8710$
3. $p=1-P(\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap\overline{G_3})=0,856$
4. Arbre :



Pour tout entier naturel n non-nul, $p_{n+1}=P(\overline{G_{n+1}})$ donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & P(G_n\cap G_{n+1})+P(\overline{G_n}\cap G_{n+1}) \\ & = & p_n\times 0,8+(1-p_n)\times 0,6 \\ & = & 0,2p_n+0,6 \\ & = & \dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5} \end{array}$$

5. Pour n entier naturel, soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = 0,1$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné, $n \geq 1$.
Par hypothèse de récurrence, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ et d'après la question précédente $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ donc :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ pour tout entier naturel n non-nul.