

## Corrigé

**Exercice 1:**

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 2x + 1 = -\infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 5x^2 + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - x(x^3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$

**Exercice 2:**

1. Pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{1+x^2}{x^3+x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\frac{1}{x^2}+1}{1+\frac{1}{x}}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x^3+x^2} = 0$

2. Pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{6x-8x^2}{1+x+x^2} = -8 \times \frac{\frac{-3}{4x}+1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4x} + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x-8x^2}{1+x+x^2} = -8$

3. Pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{6x^2+x+1}{x-4} = 6x \times \frac{1+\frac{1}{6x}+\frac{1}{6x^2}}{1-\frac{4}{x}}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x+1}{x-4} = +\infty$

**Exercice 3:**

1.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 3 = 5$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} 8x + 4 = 20$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8x+4}{x^2-2x} = -\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} 2x^3 - 17 = 4\sqrt{2} - 17 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} 2 - x^2 = 0^-$  donc  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{2x^3-17}{2-x^2} = +\infty$

**Exercice 4:**

1.  $2 - x^2 = 0 \iff x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$  donc  $h$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ .

De plus,  $h'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(2 - x^2)^2}$ .

Comme  $(2 - x^2)^2 > 0$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ ,  $h'(x)$  est du signe de  $-x^2 + 2x - 2$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ .

Ce polynôme du second degré admet après étude du discriminant aucune racine et comme  $a < 0$ ,  $h$  est décroissante sur  $]-\infty; -\sqrt{2}[$ , sur  $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$  et sur  $]\sqrt{2}; +\infty[$ .

2. En utilisant la méthode de l'exercice 2, on trouve que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1$ . En utilisant la méthode de l'exercice 3, on trouve que  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} h(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} h(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} h(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} h(x) = +\infty$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} h(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} h(x) = -\infty$  donc la courbe de la fonction  $h$  admet deux asymptotes verticales d'équation  $x = -\sqrt{2}$  et  $x = \sqrt{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1$  donc la courbe de la fonction  $h$  admet une asymptote horizontale en  $-\infty$  et  $+\infty$  d'équation  $y = -1$ .

**Exercice 5:**

$$\alpha = -\frac{13}{4} \text{ et } \beta = -\frac{13}{8}$$