Corrigé

Exercice 1:
On considère l'algorithme suivant (N désigne un entier naturel) :

```
Entrée : Saisir la valeur de N
Initialisation : Affecter à i la valeur 0
    Affecter à p la valeur 63,2
Traitement : Tant que i < N
    Affecter à i la valeur de i + 1
    Affecter à p la valeur de 1,002 × p + 0,1

Sortie : Afficher p
```

On va faire fonctionner cette algorithme pour $N = 4$

1. L'algorithme va faire 4 boucle (pour i=0 ; 1 ; 2 et 3)
2. Avant d'entrer dans la première boucle : $i = 0$; $p = 63,2$
3. À la fin de la première boucle : $i = 1$; $p = 63,4264$
4. À la fin de la deuxième boucle : $i = 2$; $p = 63,6532528$
5. À la sortie de l'algorithme : $i = 4$; $p \simeq 64,108\cdots$

Exercice 2:
On considère la suite v de terme général v_n définie par : $v_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n \times 1,005 + 30$.

1. Pour S = 1000 et N = 4 l'affichage final est $S \simeq 1020,151$.
2. L'algorithme proposé ci-dessous, pour S = 1000 et N = 4 affiche en sortie finale v_4.

Entrées	:	Deux nombres entiers S et N
Traitement	:	Pour K allant de 1 à N
		Donner à S la valeur S $\times 1,005 + 30$
Afficher	:	S

Exercice 3:

1.

initialisation							
	N	0					
	U	10					
traitement		étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5	...
	N	1	2	3	4	5	
	U	15	25	45	85	165	
sortie							

L'algorithme s'arrête après 5 étapes.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 5$.
On cherche la plus petite valeur n_0 de n telle que $u_n > 1000$.

(a) On peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer n_0 :

Initialisation	:	Affecter à N la valeur 0.
		Affecter à U la valeur 10.
Traitement	:	Tant que $U \leqslant 1000$
		Affecter à N la valeur N + 1.
		Affecter à U la valeur 2U - 5.
Sortie	:	Afficher N.

(b) En continuant le tableau de la question 1. on trouve $n_0 = 8$.

Exercice 4:
Il s'agit de remplir la grille suivante dont chaque case blanche doit contenir exactement un chiffre (entre 0 et 9).

1. Pour y parvenir, il faut déterminer les quatre nombres entiers correspondants aux définitions ci-dessous.

	A	**B**	**C**	**D**
1	2	4	3	7
2	6	8	0	4
3		2	7	6
4		5	0	0

Ligne 1 : Somme des 50 premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 4,37$ et de raison $r = 0,74$.
$S_{50} = \dfrac{u_1 + u_{50}}{2} = \dfrac{4,37 + 4,37 + 50 \times 0,74}{2} = 24,37$
Ligne 2 : $6 \times 1134 = 6804$ est le seul multiple de 1134 compris entre 5700 et 7800.
Ligne 3 : On a successivement à la fin de l'étape 1 : $i = 1$; $a = 46$; $b = 46$
à la fin de l'étape 2 : $i = 2$; $a = 92$; $b = 138$
à la fin de l'étape 3 (dernière boucle) : $i = 3$; $a = 138$; $b = 276$.
Le nombre affiché en sortie de l'algorithme pour $n = 3$ est $b = 276$.
Ligne 4 : $\lim\limits_{n \to +\infty} -3(0,5)^n + 500 = 500$

Exercice 5:
Soit la suite U de terme général U_n définie par $\mathrm{U}_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n + 2(n+1)$.

1. (a) Si on fait fonctionner cet algorithme avec N = 3 on obtient comme affichage : 0 1 3 7.
   Nous n'obtenons pas l'affichage des valeurs des quatre premiers termes de la suite U qui sont 0 ; 2 ; 6 et 12.

   (b) Pour obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite U on peut utiliser l'algorithme suivant :

Entrée :	N un entier naturel non nul
Initialisation :	P = 0
Traitement :	Pour K allant de 0 à N :
	Affecter à P la valeur P +2 K
	Afficher P
Fin de l'algorithme	

2. (a) Pour tout entier naturel k : $\left(k^2 + k\right) + 2(k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1$
   $= (k+1)^2 + k + 1.$

   (b) Pour tout entier naturel n, notons P_n la propriété $\mathrm{U}_n = n^2 + n$.
   Démontrons par récurrence que P_n est vérifiée pour tout entier naturel n.
   * Initialisation : $0^2 + 0 = 0 = U_0$ donc $P(0)$ est vraie.
   * Hérédité : On suppose que pour une valeur de n la propriété $P(n)$ est vraie, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
   On a $U_{n+1} = U_n + 2(n+1)$ avec $U_n = n^2 + n$
   Donc $U_{n+1} = n^2 + n + 2(n+1) = (n+1)^2 + (n+1)$ D'après la question précédente.
   D'où $P(n+1)$ est vraie
   * Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
   C'est à dire, pour tout entier naturel n ; $u_n = n^2 + n$.

   (c) Pour tout entier naturel n : $U_n \geqslant n^2$ avec $\lim n^2 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim U_n = +\infty$.