Corrigé

Exercice 1:

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \text{ pour } x \leqslant -1 \\ 3 - x \text{ pour } x > -1 \end{cases}$

   Les fonctions polynôme $x^2 - 2x + 1$ et $3 - x$ sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$.
   f est donc continue sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Continuité de f en -1 ? $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = (-1)^2 - 2\times(-1) + 1 = 4$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 3 - (-1) = 4$
   La fonction f est donc aussi continue en -1.
   f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 \text{ pour } x < 1 \\ x^2 - k \text{ pour } x \geqslant 1 \end{cases}$ où k est un réel.

   Quelque soit la valeur de k, g est continue sur$]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$
   Pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$ il suffit de déterminer la valeur de k pour laquelle g est continue en 1.
   $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -3$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = g(1) = 1 - k$.
   Donc g est continue en 1 si $-3 = 1 - k$ c'est à dire si $k = 4$.
   Pour $k = 4$ g est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2x^3 + x - 10$

1. Pour tout $x \in [0\,;\,2]$, $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$.
   On a donc :

x	0		2
$f(x)$			8
	-10	$\nearrow$	

2. f est continue strictement croissante sur $[0\,;\,2]$ et 0 compris entre $f(0)$ et $f(2)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,2]$.
3. $1,61 < \alpha < 1,62$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 2}{x^2 + 1}$.

1. $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^2+1) - (x^2-4x-2)(\times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 4x^2 - 4 - (2x^3 - 8x^2 - 4x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 6x - 4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

   Étudions le signe du trinôme $4x^2 + 6x - 4$
   $\Delta = 6^2 - 4\times 4\times(-4) = 100$
   $\Delta > 0$ donc $4x^2 + 6x - 4$ a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-6-10}{2\times 4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-6+10}{2\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

   De plus $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; $f(-2) = 2$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -3$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.
   On a donc :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	-10						
$f(x)$			2				1
	1	$\nearrow$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

2. • Pour tout x de l'intervalle $]-\infty\,;\,-2]$ $f(x) > 1$ donc l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;\,-2]$.

- f est continue, strictement décroissante sur $\left[-2\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et -1 est compris entre $f(-2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\left[-2\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
- f est continue, strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ et -1 est compris entre $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
- Conclusion : comme $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq -1$, d'après ce qui précède l'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions x_1 et x_2 sur $\mathbb{R}$.

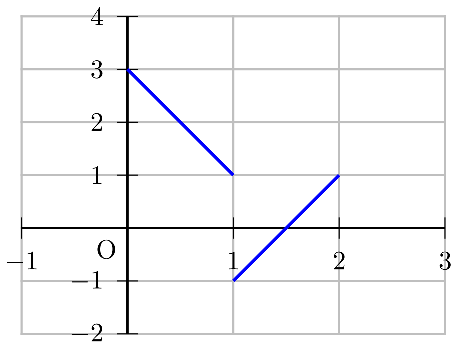
3. on a $x_1 \simeq -0,3$ et $x_2 \simeq 2,2$

Exercice 4:

1. Considérons la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x} - 2 + 2x$.
   $x\sqrt{x} = 2 - 2x \iff f(x) = 0$
   Étudions les variations de f.
   Pour tout x de $[0;+\infty[$; $f'(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2 > 0$.
   De plus $f(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   f est continue, strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et 0 est compris entre $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;\,+\infty[$.
   En conclusion l'équation $x\sqrt{x} = 2 - 2x$ admet une unique solution. α sur $[0;+\infty[$.
2. $0,704 < \alpha < 0,705$.

Exercice 5:

Soit g la fonction définie sur $[0;2]$ par : $g(x) = \begin{cases} -2x+3 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x-3 \text{ si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

1. 

2. Les conditions du TVI ne sont pas remplies car g n'est ni continue ni strictement monotone sur $[0\,;\,2]$
3. L'équation $g(x) = 0$ a une seule solution sur $[0;2]$ qui est $x = 1,5$.
4. Les conditions du TVI sont suffisantes mais ne sont pas nécessaires d'après ce qui précède.