

Exercices type bac

Exercice 1:

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

1. a. Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
b. Quel nombre obtient-on en sortie?
2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$$

- a. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p .
- b. A l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

- c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$. Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n .
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

- c. Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$$

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a. A l'aide de la calculatrice, quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
 - b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

- c. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
4. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- a. Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
- b. Écrire un algorithme qui donne la somme S_n en fonction de la valeur de l'entier n demandée par l'utilisateur.
- c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.