Dérivées et fonctions composées

Exercice 1:
Compléter le tableau ci-dessous :

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec k réel		
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$		
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$		
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$		
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$		
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$		

Exercice 2:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel :

- Démontrer que pour $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- Démontrer que pour $n \geq 1$, la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$ et

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$$

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) > 0$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 3:
Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$
2. $g(x) = \left(3x^2 - 2x + 6\right)^4$
3. $h(x) = \sqrt{1+x^2}$

Exercice 4:
Dans chaque cas déterminer la fonction $f = u \circ v$, préciser son domaine de définition, étudier sa dérivabilité puis déterminer les variations de f.

1. $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x - 4$
2. $u(x) = x^3$ et $v(x) = 2x^2 + 6x + 1$
3. $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = 3x + 2$
4. $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + x + 1$

Exercice 5:

Soit f et g deux fonctions dérivables sur respectivement D_f et D_g. On considère la fonction composée $u = f \circ g$ définie sur D_g (c'est à dire que pour tout réel $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$). L'objectif de la suite est de répondre aux questions suivantes :

$$\boxed{u \text{ est-elle dérivable sur } D_g\,?\ \text{Si oui, quelle est l'expression de } u'(x)\,?}$$

1. Soit $a \in D_g$. Rappeler la définition de la dérivabilité a pour la fonction u.
2. On étudie à présent la fonction t définie au voisinage de a par :

$$t(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

   a. Compléter l'égalité ci-dessous :

$$t(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{\dots\dots\dots\dots} \times \frac{g(x) - g(a)}{\dots\dots\dots\dots}$$

   b. Déterminer la limite de chacun des termes qui compose t en a.

   c. Conclure.
3. Répondre à la question initiale.