Chapitre 12: Géométrie vectorielle II

Dans ce chapitre, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété:
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
Un point M appartient à la droite $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique (de paramètre t) de la droite $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$.

Démonstration:
$M(x; y; z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}.$$

Exemple:
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(4; 5; 6)$.
On veut savoir si le point $B(-3; -3; -3)$ appartient à $\mathcal{D}$.

- *Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :*

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- *$B \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que*

$$\begin{cases} -3 = 1 + 4t \\ -3 = 2 + 5t \\ -3 = 3 + 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 4t \\ -5 = 5t \\ -6 = 6t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Ainsi, $B \in \mathcal{D}$.

2 Représentation paramétrique d'un plan

Propriété:
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point, $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ deux vecteurs non-colinéaires de l'espace.
Un point M appartient au plan $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad \texttt{et} \quad s \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Démonstration:
$M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement s'il existe t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ta + s\alpha \\ y - y_A = tb + s\beta \\ z - z_A = tc + s\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{cases}.$$