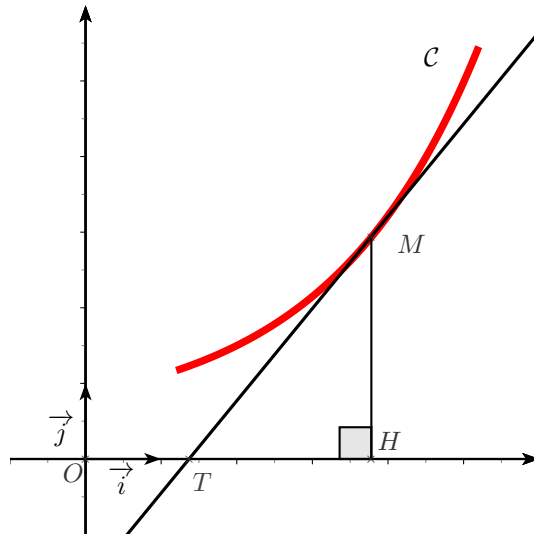


Introduction

1 Un problème de Leibniz¹

Trouver une fonction f strictement positive et dérivable sur \mathbb{R} dont la courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormal donnée $(O; \vec{i}, \vec{j})$, à la propriété suivante :

Quel que soit le point M de \mathcal{C} , la tangente en M à \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses un point T tel que $\overrightarrow{TH} = \vec{i}$



Le problème ci-dessus fut énoncé par Leibniz pour montrer l'insuffisance du **calcul algébrique**. Pour résoudre ce problème, il faut utiliser le **calcul différentiel**².

Dans cette activité, nous allons caractériser les fonctions f satisfaisant à la condition énoncée par Leibniz.

Supposons qu'une telle fonction f existe et notons a l'abscisse du point quelconque M de \mathcal{C} .

1. Démontrer que $f'(a)$ est non-nul pour tout réel a .
2. Déterminer l'abscisse du point T en fonction de a .
3. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\overrightarrow{TH} = \vec{i} \iff f'(a) = f(a)$$

4. Démontrer que f convient si et seulement si $f' = f$.

Conclusion :

Pour déterminer f , on est conduit à résoudre une équation³ dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure la dérivée première de la fonction.

2 La fonction exponentielle

On admet à présent qu'il existe une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

1. Dans un premier temps, on va chercher à démontrer qu'une telle fonction ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Pour cela, on introduit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)f(-x)$.
 - a. Déterminer la fonction dérivée de g .
 - b. En déduire que $g(x) = 1$ pour tout réel x .
 - c. Démontrer par l'absurde que f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
2. A présent, on va chercher à démontrer l'unicité d'une telle fonction. Supposons que f_1 et f_2 sont deux fonctions vérifiant les conditions initiales et on introduit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.
 - a. Déterminer la fonction dérivée de h .
 - b. En déduire que $h(x) = 1$ pour tout réel x .
 - c. Conclure.

Conclusion :

On appelle fonction exponentielle, noté $\exp(x)$, l'unique fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. (1646-1716) Mathématicien allemand

2. Calcul utilisant la notion de fonction dérivée

3. Une telle équation est dite **équation différentielle**