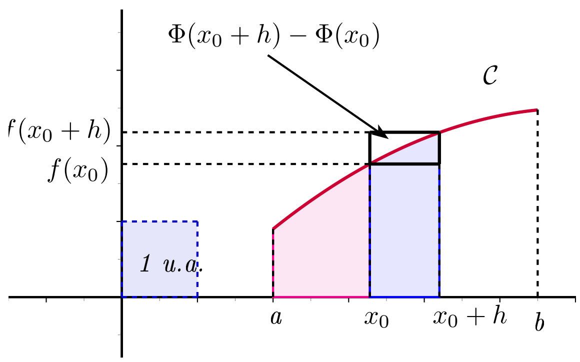
# Chapitre 16: Intégration II

## 1 Intégrale d'une fonction continue et conséquences

**Théorème:**
*Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$*

**Démonstration: (R.O.C.)**
*On se place dans le cas où $f$ est croissante sur $[a;b]$. Soit $x_0$ et $h$ deux nombres tels que $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + h \in [a;b]$ et $h \neq 0$.*




- *Si $h > 0$, comme $f$ est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0+h)$. De plus, $\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0; x_0+h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur $h$ et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ d'où :*

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0+h)$$

  *et comme $h$ est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$*
- *Si $h < 0$, on démontre de la même manière que : $f(x_0+h) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$*

*Par continuité de $f$ en $x_0$, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

*Ainsi $\Phi$ est dérivable en $x_0$ et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel $x_0$ de $[a;b]$ donc $\Phi$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$*

**Corollaire:**
*Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction $f$ admet une primitive $\Phi$ sur $[a;b]$ définie par $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$.*

**Théorème: (fondamental)**
*Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)\mathtt{d}t = F(b) - F(a)$$

*où $F$ est une primitive quelconque de $f$.*

**Démonstration:**
*$f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ donc $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$ est aussi une primitive de $f$ sur $[a;b]$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\mathtt{d}t + k$ sur $[a;b]$. De plus $F(a) = \int_a^a f(t)\mathtt{d}t + k = k$ donc $k = F(a)$ donc $F(b) = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t + F(a)$ soit $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t$*

## 2 Continuité et primitives

**Théorème:**
*Toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$.*

**Démonstration: (R.O.C.)**
*On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum $m$ et un maximum $M$.*
*Soit donc $f$ une fonction continue sur $[a;b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a;b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.*
*D'après le théorème précédent, $h$ admet une primitive $\Phi$ sur $[a;b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.*
*Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.*
*$F$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$*

**Remarque:**
*On admettra que ce résultat peut s'étendre pour un intervalle quelconque $I$.*

## 3 Extension de la notion d'intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction $f$ continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et on démontré que si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On admet dans la suite du chapitre que cette formule s'étend au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et on pose la définition suivante :

**Définition:**
*$f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$, $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, $a$ et $b$ sont deux nombres quelconques de $I$.*
*L'intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.*

**Remarque:**
*On note*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

**Exemple:**
*$x \longmapsto 6x^2$ est une fonction continue sur $[-3;4]$ donc* $\displaystyle\int_{-3}^4 6x^2\mathrm{d}x = [2x^3]_{-3}^4 = 128 - (-54) = 182$

**Propriété:**
*Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.*

## 4 Linéarité de l'intégration

**Théorème:**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ et $\lambda$ un nombre réel :*

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

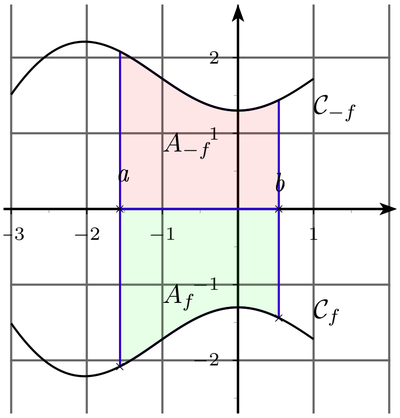
**Démonstration:**
*En exercice...*

**Corollaire:**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$. Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

**Démonstration:**
*$f - g$ est une fonction continue et $f(x) - g(x) \geq 0$ donc* $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

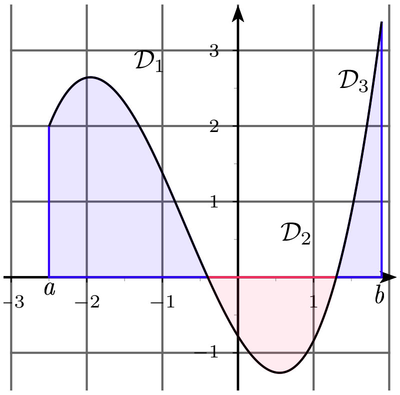
**Remarque:**
*Attention, la réciproque est fausse.*

**Propriété:**
*Soit $f$ une fonction continue et négative sur $[a;b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *est l'opposé de l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe* $\mathcal{C}$.




*En effet,* $-f$ *est positive donc* $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = A_{-f} = A_f$ *et* $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *donc* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A_f$

**Propriété:**
*Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ (de signe quelconque) et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.*
$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *est la somme des aires « algébriques »des domaines entre* $\mathcal{C}$ *et l'axe des abscisses.*




*Par exemple, sur la figure ci-dessus :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_{\mathcal{D}_1} - \mathcal{A}_{\mathcal{D}_2} + \mathcal{A}_{\mathcal{D}_3}$$

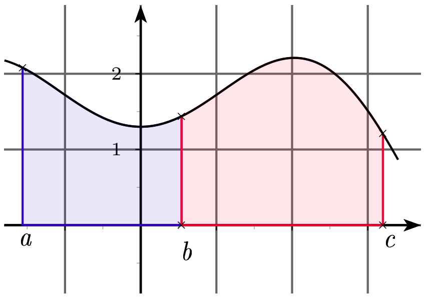
**Propriété:**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ tel que $g(x) \leq f(x)$ sur $[a;b]$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a;b]$ est définie par* $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

## 5 Relation de Chasles

**Propriété: (Relation de Chasles)**
*Soit $f$ une fonction continue sur $I$ et $a$, $b$, $c$ trois réels de $I$ alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

**Remarque:**
*Dans le cas où $f$ est positive sur $I$ et $a \leq b \leq c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :*



*Cependant la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des réels $a$, $b$, $c$ et le signe de $f$.*

## 6 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

**Définition: (Valeur moyenne)**
*Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$. La valeur moyenne de la fonction $f$ sur $[a;b]$ est le nombre $\mu$ défini par :*

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathtt{d}x$$

**Théorème: (Inégalité de la moyenne)**
*Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $m$ et $M$ deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a;b]$. On a alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathtt{d}x \leq M(b-a)$$