Intégrale d'une fonction continue

Exercice 1:

Dans cet exercice, on va démontrer que toute fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$. Pour cela, on rappelle le théorème suivant démontré au chapitre 13 :

Théorème:

*Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction f admet une primitive Φ sur $[a;b]$ définie par $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$.*

On considère donc une fonction f continue sur $[a;b]$ (non nécessairement positive).

1. En admettant que f possède un minimum m et un maximum M sur cet intervalle, démontrer que la fonction $g : x \longmapsto f(x) - m$ est positive sur $[a;b]$.
2. Que peut-on en déduire pour g d'après le théorème ci-dessus ?
3. Déterminer une primitive de f à l'aide d'une primitive de g.
4. Conclure.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+3x+4$. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

1. Tracer la courbe de la fonction f dans un repère d'unité 1 cm et hachurer l'aire $\mathcal{A}$ que l'on veut calculer.
2. Déterminer $\mathcal{A}$.
3. Déterminer $\int_1^7 f(x)\mathtt{d}x$.

Exercice 3:

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+2)^2}\mathtt{d}x$

b. $\int_{-3}^2 5x(x^2-8)^2\mathtt{d}x$

c. $\int_0^3 1 - \frac{1}{2}e^x\mathtt{d}x$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\cos(\theta)\mathtt{d}\theta$

e. $\int_0^{\pi} \cos(2t)\mathtt{d}t$

f. $\int_0^4 \frac{5}{\sqrt{x+5}}\mathtt{d}x$