1 Primitive

2 Continuité et primitives

Théorème:

.

Démonstration: (R.O.C.)

On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum m et un maximum M.
Soit donc f une fonction continue sur $[a;b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a;b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
D'après le théorème précédent, h admet une primitive Φ sur $[a;b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.
Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.
F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a;b]$

Remarque:

On admettra que ce résultat peut s'étendre pour un intervalle quelconque I.

3 Extension de la notion d'intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et on démontré que si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On admet dans la suite du chapitre que cette formule s'étend au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et on pose la définition suivante :

Définition:

f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I, a et b sont deux nombres quelconques de I. L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre

Remarque:

On note

Exemple:

.

Propriété:

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ alors $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$ et $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4 Linéarité de l'intégration

Théorème:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et λ un nombre réel :

- .
- .

Démonstration:

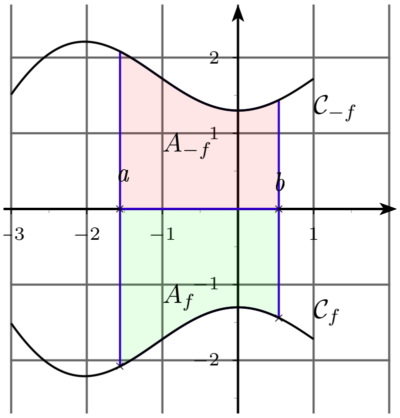
En exercice...

Corollaire:
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Pour $a<b$, si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors

Démonstration:
$f-g$ est une fonction continue et $f(x)-g(x) \geq 0$ donc $\int_a^b (f(x)-g(x))\mathtt{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathtt{d}x - \int_a^b g(x)\mathtt{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathtt{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathtt{d}x$

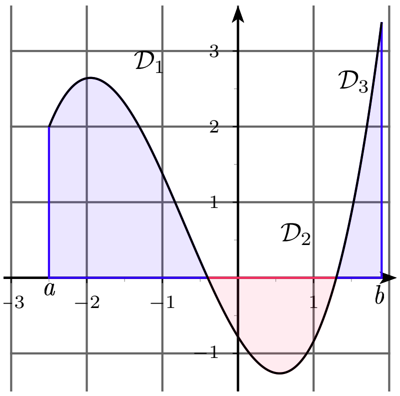
Remarque:
Attention, la réciproque est fausse.

Propriété:
Soit f une fonction continue et négative sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ est l'opposé de l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



En effet, $-f$ est positive donc $\int_a^b -f(x)\mathtt{d}x = A_{-f} = A_f$ et $\int_a^b -f(x)\mathtt{d}x = -\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ donc $\int_a^b f(x)\mathtt{d}x = -A_f$

Propriété:
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ (de signe quelconque) et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ est la somme des aires « algébriques »des domaines entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.



Par exemple, sur la figure ci-dessus :

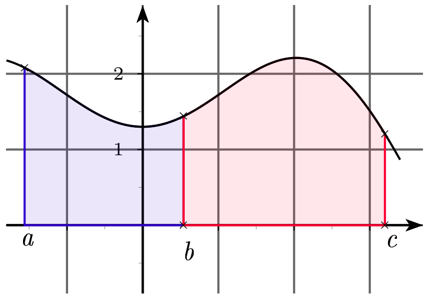
$$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x =$$

Propriété:
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ tel que $g(x) \leq f(x)$ sur $[a;b]$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a;b]$ est définie par

5 Relation de Chasles

Propriété: (Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I alors

Remarque:
Dans le cas où f est positive sur I et $a \leq b \leq c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :



Cependant la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des réels a, b, c et le signe de f.

6 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition: (Valeur moyenne)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

Théorème: (Inégalité de la moyenne)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a;b]$. On a alors