Linéarité de l'intégrale et conséquences

Exercice 1:

Démontrer le théorème suivant :
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et λ un nombre réel :

- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 2:

Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e-1$ et $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.
En déduire à l'aide de la linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 5e^x - 3x^2\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 e^x + 5x^2\mathrm{d}x$.

Exercice 3:

Démontrer le théorème suivant :
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Pour $a<b$, si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

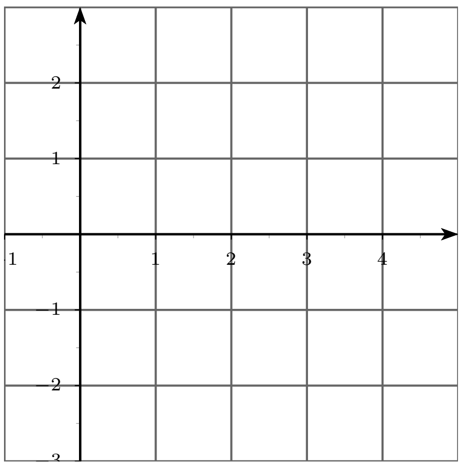
Exercice 4:

Démontrer à l'aide d'un exemple que la réciproque du théorème ci-dessous est fausse.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

1. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[0;4]$.



2. Déterminer le signe de f sur $[0;4]$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.
4. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=4$.

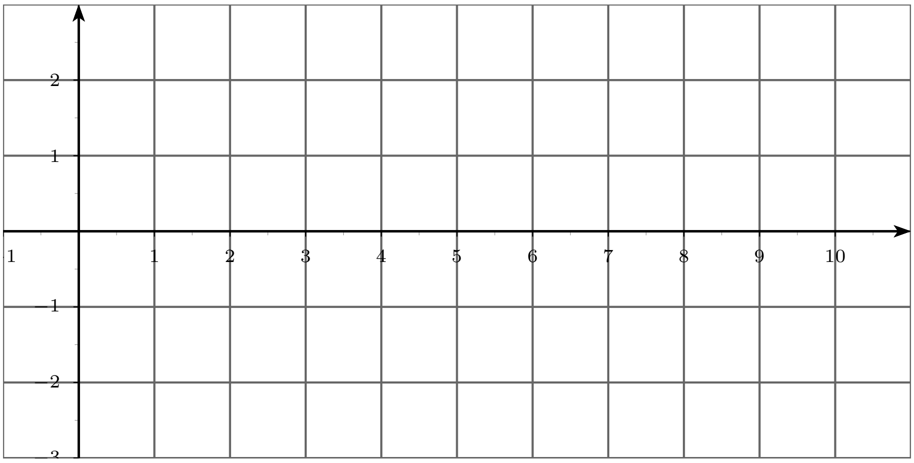
Exercice 6:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2}{(1-x)^2}$.
Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=2$ et $x=10$.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x-2 & si \quad x<4 \\ -\frac{2}{3}x+\frac{14}{3} & si \quad 4 \leq x \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[0;10]$.



3. Déterminer le signe de f sur $[0;10]$.
4. Calculer $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$, $\int_4^7 f(x)\mathrm{d}x$, $\int_7^{10} f(x)\mathrm{d}x$.
5. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=10$.

Exercice 8:

Déterminer l'aire située entre les courbes des fonctions carré et racine carrée pour $x \in [0;1]$: