Chapitre 1: Suites I

1 Définition

Définition:
On appelle suite numérique une liste infinie ordonnée de nombres réels.

Exemple:
La suite des inverses des entiers naturels-non nuls :

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

Remarques:
- *Une suite est notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou tout simplement* (u_n).
- *Le terme d'indice* n *est noté* u_n*, on l'appelle le terme général de la suite* (u_n).
- *Il ne faut pas confondre la suite* (u_n) *et le terme général de la suite* u_n.

Exemple:
Dans l'exemple précédent, on a :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

On numérote les termes de cette suite à partir de 1.

n	1	2	$\dots$	$n-1$	n	$n+1$	$\dots$
u_n	$u_1 = 1$	$u_2 = \frac{1}{2}$	$\dots$	$u_{n-1} = \frac{1}{n-1}$	$u_n = \frac{1}{n}$	$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$	$\dots$

Il est important de ne pas confondre u_{n+1} *le terme d'indice* $(n+1)$ *et* $u_n + 1$ *le terme d'indice* n *auquel on ajoute* 1.

2 Mode de génération

2.1 Par définition explicite du terme d'indice n

Si f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$, on peut définir une suite (u_n) en posant pour tout n, $u_n = f(n)$.

Exemples:
- $u_n = 7n - 6$, *ici* $f(x) = 7x - 6$.
- $u_n = \dfrac{1-n}{1+n^2}$, *ici* $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$.

2.2 Par récurrence

On donne le premier terme u_0 de la suite et une relation entre u_{n+1} et u_n qui permet de calculer les termes de la suite (u_n) les uns après les autres.

Exemple:
On définit la suite (u_n) *par* $u_0 = 2$ *et pour tout entier* n, $u_{n+1} = 5u_n + 1$. *On a :* $u_1 = 5u_0 + 1 = 11$, $u_2 = 56$, $u_3 = 281$, $\dots$ *Dans cet exemple, on remarque que* $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* $f(x) = 5x + 1$. *Ainsi, pour déterminer* u_{10}*, il faut d'abord déterminer* u_9, u_8, $\dots$

3 Variations

Définition:
Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n,

$$u_n < u_{n+1}$$

Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n,

$$u_n > u_{n+1}$$

Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_{n+1}$$

Remarques:
- *On définit de même une suite croissante ou décroissante. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.*
- *Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) :*
  - $\rightarrow$ *On regarde les premiers termes ;*
  - $\rightarrow$ *Pour tout entier n, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ $\boxed{ou}$ on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 si (u_n) est à termes positifs.*

Exemples:
- *La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante, en effet :*

$$u_0 = 1\,;\, u_1 = -1\,;\, u_2 = 1\,;\, u_3 = -1\,;\, \ldots$$

- *La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3n$ strictement croissante, en effet pour tout n :*

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - \left(n^2 + 3n\right) = 2n + 4 > 0$$

- *La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ strictement décroissante, en effet pour tout n :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \quad \textit{et} \quad (u_n) \textit{ est à termes positifs donc} \quad u_{n+1} < u_n$$

Théorème:
La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$.
- *Si f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.*
- *Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.*

Remarque:
La réciproque est fausse !

4 Suites arithmétiques

Définition:
On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$. Ce réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Exemples:
- *La suite des entiers naturels pairs définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n$ est une suite arithmétique de raison 2 puisque :*

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2$$

- *La suite des carrés des entiers naturels définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ n'est pas une suite arithmétique puisque :*

$$u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1 \quad \textit{et} \quad u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$$

Théorème:
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$

Propriété:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :
- *Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ;*
- *Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante ;*
- *Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.*

5 Suites géométriques

Définition:
On dit qu'une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$. Ce réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Exemples:
- *La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 puisque :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \quad \textit{soit} \quad u_{n+1} = 2u_n$$

- *La suite des carrés des entiers naturels non-nuls définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = n^2$ n'est pas une suite géométrique puisque :*

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4 \quad \textit{et} \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4} \neq 4$$

Théorème:
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$

Propriété:
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q :
- *Si $1 < q$, la suite (u_n) est strictement croissante ;*
- *Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante ;*
- *Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante ;*
- *Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone.*

6 Sommes de termes

Théorème:
La somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison r est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Théorème:
La somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

7 Raisonnement par récurrence

Soit P_n une proposition qui dépend d'un entier naturel n et n_0 est un entier naturel. Pour montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, P_n est vraie, on procède en trois étapes :

Étape 1, l'initialisation : On vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est à dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0.
Étape 2, l'hérédité : On suppose que pour un entier naturel quelconque $n \geqslant n_0$, P_n est vraie (c'est l'hypothèse dite de récurrence) et on démontre qu'alors P_{n+1} est vraie.
Étape 3, la conclusion : On peut alors conclure que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n ($n \geqslant n_0$).

Exemple:
Pour n entier naturel non-nul, soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Initialisation : *Pour $n = 1$, $1 \times 2 = 2$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.*

Hérédité : *Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné. Par hypothèse de récurrence :*

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

donc

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

soit

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right)$$

or $\dfrac{n}{3} + 1 = \dfrac{n+3}{3}$ donc

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
Conclusion : *D'après le principe de récurrence,*

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pour tout entier naturel non-nul.