

Du discret au continu

Exercice 1:

On considère l'épreuve aléatoire : « on lance dix fois de suite un dé équilibré à six faces » et on s'intéresse au nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des dix lancers. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des dix lancers.

1. Donner la loi de probabilité de X .
2. Interpréter puis déterminer $P(X = 2)$ et $P(X \leq 2)$.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X

Exercice 2:

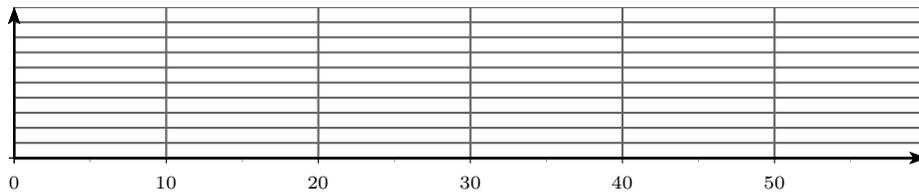
Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 3, 4, 5 ou 6; il perd s'il obtient 1 ou 2. Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants. Déterminer la probabilité pour que le joueur perde au moins trois fois au cours d'une partie.

Exercice 3:

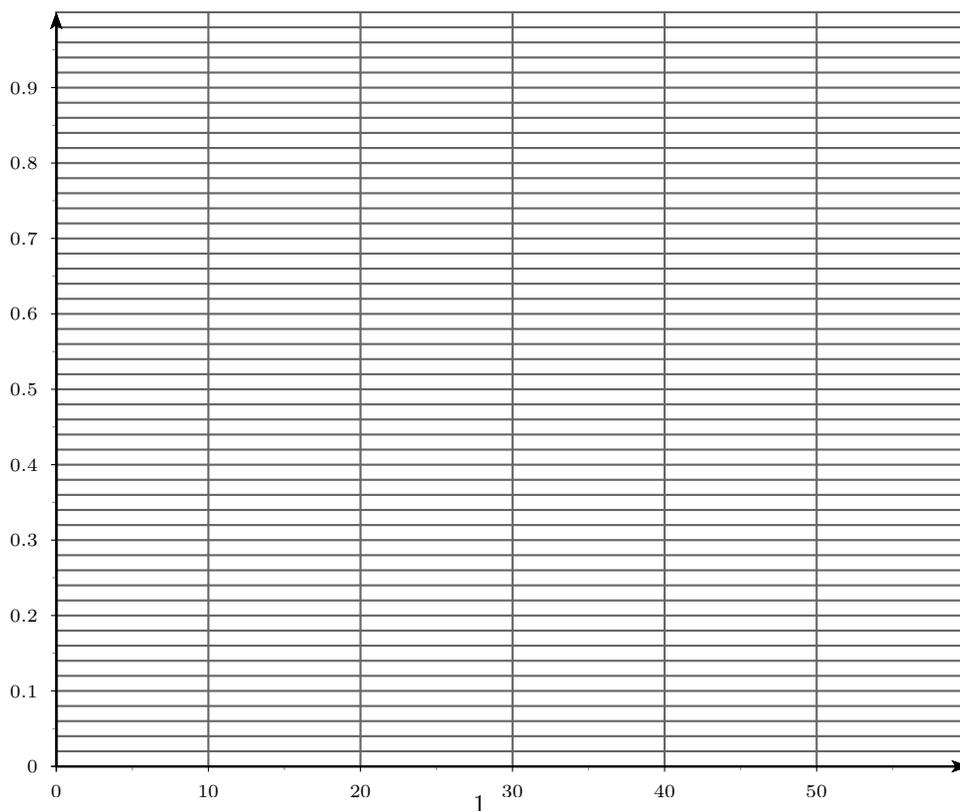
On a étudié le temps mis par les élèves d'un lycée pour effectuer le trajet domicile-lycée. Cette étude a conduit aux résultats suivants :

temps (min)	[0; 10[[10; 20[[20; 30[[30; 40[[40; 50[[50; 60]
fréquence	0,1	0,18	0,31	0,28	0,1	0,03
f.c.c.						

1. Tracer l'histogramme des fréquences dans le repère ci-dessous :



2. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes (f.c.c.) dans le repère ci-dessous :



3. On choisit au hasard un élève dans cette population et on note X le temps du trajet domicile-lycée.
 - a. Donner $X(\Omega)$.
 - b. Déterminer la probabilité que la valeur X soit inférieur à 40.
 - c. Déterminer l'aire de la partie de l'histogramme pour $x \in [0; 40[$. Conclure.
 - d. Déterminer la probabilité que la valeur X soit compris entre à 20 et 50.
 - e. Déterminer la probabilité que la valeur X soit supérieur 30.

De manière générale, si $x \in [0; 60]$, on peut déterminer la probabilité $P(X < x)$. Cette probabilité est la valeur de **l'aire de la partie de l'histogramme** située avant la valeur x (l'aire totale étant 1 unité) ou encore la valeur de la fréquence cumulée croissante correspondant à x .

On obtient alors que :

$$P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$$

La fonction f est appelée **densité de probabilité** de X .

4. Déterminer f dans l'exemple suivant.

Un peu de cours...

Une densité de probabilité f associé à une variable aléatoire X est une fonction continue (sauf en un nombre fini de points) sur un intervalle $I = [a; b]$ et positive et telle que :

$$\int_a^b f(t)dt = 1$$

On a alors pour $x \in [a; b]$

$$P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt$$

Exercice 4:

On tire au hasard sur une cible de rayon 1 mètre sans jamais la manquer. X est la variable aléatoire qui donne la distance de l'impact au centre. On admet que X a pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0; 1] \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Tracer la courbe de la fonction f sur \mathbb{R} .
3. Déterminer :
 - $P(X < 0,5)$
 - $P(X \geq 0,5)$
 - $P(0,2 \leq X \leq 0,8)$
 - $P(X = 0,5)$
4. Vérifier que si $0 \leq a < b < 1$ alors $P(a \leq X \leq b)$ est égale au rapport de l'aire de la couronne, définie par a et b et celle de la cible.