Loi exponentielle

Exercice 1:

Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{\star,+}$ lorsque sa densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Tracer la courbe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $P(X \leq t)$ pour tout réel t.
4. En déduire $P(X \geq t)$ pour tout réel t.

Exercice 2:

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures. On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est $0,131$.
   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .
2. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit :
   a. supérieur à 5 heures.
   b. supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
   c. compris entre 6 et 10 heures.
3. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a. Quelle est la loi suivie par Y ?
   b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c. Calculer l'espérance mathématique de Y.

Exercice 3:

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

1. Déterminer la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années..
2. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
3. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.
   Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.
   a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
   b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.