Chapitre 22: Fonction logarithme II

1 Limites

Propriété:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

On obtient le tableau de variations complet de la fonction logarithme :

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)'$	$\Vert$	$+$	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Propriété:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

2 Dérivation et primitive

Propriété:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I. La fonction $x \longmapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple:
Soit $u : x \longmapsto 1 + 2x^2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
u est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4x$. Ainsi, la fonction $f : x \longmapsto \ln(2x^2 + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$$

Théorème:
Soit $x \longmapsto u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I. La fonction $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme $\ln[u(x)] + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple:
Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$
$u : x \longmapsto 1 + x + x^2$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 1 + 2x$. De plus, $1 + x + x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives de la forme

$$F(x) = \ln[1 + x + x^2] + k$$