

Autour de la fonction logarithme

1 Limites

- a. Soit M un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $A \in]0; +\infty[$ tel que pour tout réel $x > A$, $\ln(x) > M$.
- b. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en $+\infty$.
- c. Montrer que pour $x > 0$, $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$.
- d. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en 0.

2 Approximations affines

- a. Soit $a > 0$ un nombre réel fixé. Que représente la fonction $T_a : x \mapsto \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$ pour la fonction logarithme ?
Déterminer la limite de T_a lorsque x tend vers a .
- b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$.
- c. Soit $a > 0$ un nombre réel fixé. Que représente la fonction $T_a : h \mapsto \frac{\ln(a + h) - \ln(a)}{h}$ pour la fonction logarithme ?
Déterminer la limite de T_a lorsque h tend vers 0.
- d. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$.
- e. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe de la fonction logarithme en 1.
- f. Montrer que Δ est au dessus de la courbe de la fonction logarithme.

3 Croissances comparées

- a. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. On posera $X = \ln x$.
- b. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto x \ln x$ en 0 en utilisant un raisonnement similaire.

4 Dérivées

- a. Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I .
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.
- b. Soit $f : x \mapsto \ln(7x^2 + 6x - 3) - x$. Déterminer son domaine de définition puis sa fonction dérivée.

5 Primitives

- a. Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I .
Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I .
- b. Soit $f : x \mapsto \frac{4x + 12}{x^2 + 6x + 1} + 1$. Déterminer son domaine de définition puis sa primitive qui s'annule en 3.