De la loi binomiale à la loi normale centrée réduite

On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée et on appelle succès l'apparition de Pile. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de succès parmi n lancers.

1. Déterminer la loi de probabilité de X puis $E(X)$ et $\sigma(X)$.

2. On va « fabriquer » un histogramme représentant la loi de X à l'aide du logiciel Geogebra. Pour cela, on crée d'abord un curseur n (avec n entier entre 1 et 100) puis on entre les expressions suivantes :

   ```
   Séquence[Segment[(i-0.5,Binomiale[n,0.5,i,false]),(i+0.5,Binomiale[n,0.5, i,false])],i,0,n]
   Séquence[Segment[(i-0.5,Binomiale[n,0.5,i,false]),(i-0.5,0)],i,0,n]
   Séquence[Segment[(i+0.5,Binomiale[n,0.5,i,false]),(i+0.5,0)],i,0,n]
   ```

   a. Quel résultat donne la formule **Binomiale[n,0.5,i,false]** pour des valeurs de i et de n données ?
   b. Que fait graphiquement la formule **Segment[(i-0.5, Binomiale[n,0.5,i,false]),(i+0.5,Binomiale[n,0.5, i,false])** pour une valeur de i donnée ?
   c. Quelle est l'aire du rectangle centrée en i ?
   d. En déduire l'aire totale de cet histogramme.

3. On cherche une fonction continue dont la courbe « s'ajuste » à l'histogramme pour toutes les valeurs de n. Pour cela, on introduit la variable aléatoire Z associée à la variable aléatoire X par la relation :

   $$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

   Pour obtenir l'histogramme représentant la loi de Z, il suffit déplacer tous les rectangles de $-E(X)$ puis de modifier les largeurs et les hauteurs des rectangles dans l'histogramme représentant la loi de X.

   a. Quelle opération doit-on effectuer sur la largeur des rectangles ? En déduire celle à effectuer sur la hauteur des rectangles pour conserver une aire totale constante de 1.
   b. Ouvrir le fichier réponse.

4. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Qu'observe t'on ?

5. Pour $n = 64$, déterminer une approximation de $P(30 \leq X \leq 40)$ à l'aide de la fonction f puis déterminer sa valeur exacte.