Chapitre 23: Lois exponentielles et loi normale centrée réduite

1 Lois exponentielles

Définition:
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Pour $t \in [0\ ;\ +\infty[$:

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

En utilisant l'événement contraire, on obtient aussi que :

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Théorème:
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{(X\geq t)}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Définition:
L'espérance mathématique (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $[0; +\infty[$ est :

$$E(X) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x f(x) \mathtt{d}x$$

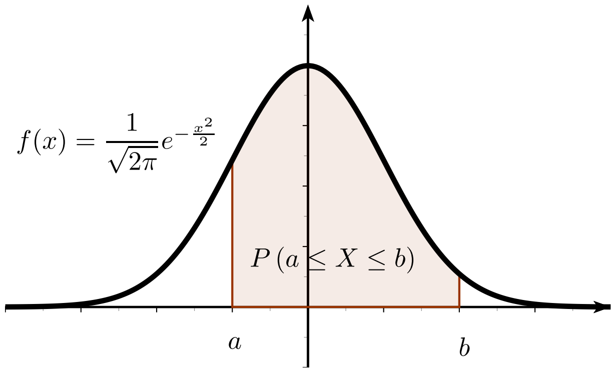
Théorème:
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

2 Loi normale centrée réduite

Définition:
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ si, pour tous réels a et b, tels que $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathtt{d}x$$



On dit que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est le fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

Propriété:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. X admet f pour densité et :

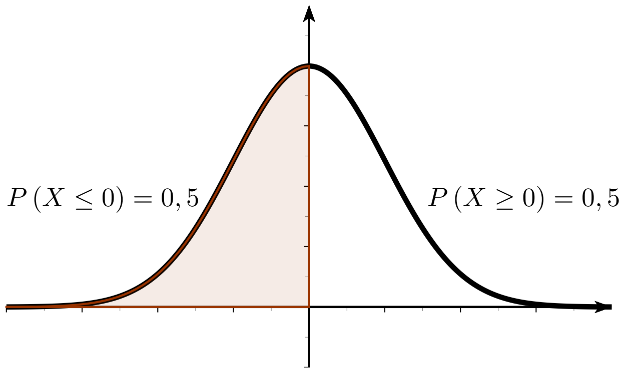
- *L'aire totale sous la courbe de f est égale à 1 ;*
- *$E(X) = 0$; $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.*

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (on dit que f est paire). On peut en déduire que :

Propriété:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

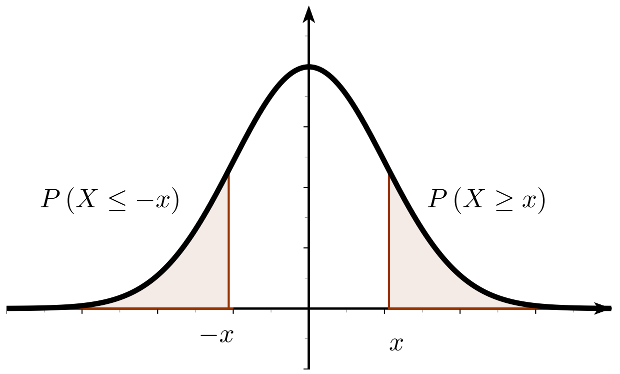
- *Par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$:*

$$P\left(X \leq 0\right) = P\left(X \geq 0\right) = 0,5$$



- *Pour tout réel x,*

$$P\left(X \leq -x\right) = P\left(X \geq x\right) = 1 - P\left(X \leq x\right)$$



- *Pour tout réel x,*

$$P\left(-x \leq X \leq x\right) = 2P\left(X \leq x\right) - 1$$