Lois exponentielles

Exercice 1:

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi exponentielle** de paramètre λ. Montrer que :

$$P_{(X \geq t)}\left(X \geq t+h\right) = P\left(X \geq h\right)$$

où t et h sont des nombres réels strictement positifs.

Exercice 2:

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

1. Déterminer la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.
2. Déterminer la probabilité que le capteur tombe en panne au cours des quatre premières années.
3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.
   Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.
   a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
   b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

Définition:

L'espérance mathématique (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ *est :*

$$E(X) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x f(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 3:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tel que $F(t) = (at+b)e^{-\lambda t}$ soit une primitive de $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$.
3. En déduire $E(X)$.

Exercice 4:

Soit une variable aléatoire X dont la densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Démontrer que pour $x \geq 0$,
$$\frac{2x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$
3. Déterminer $E(X)$.

Exercice 5:

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$. Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin. On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins cinq des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

1. Exprimer $P(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.
2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   a. Calculer $F(t)$ en fonction de t.
   b. En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.